Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 62–74
УДК 16+510.644

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 62–74
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-62-74

Н.Н. Преловский

Логические матрицы и проблема Гольдбаха

Преловский Николай Николаевич
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: mingkemingfeichangming@gmail.com

В статье рассматриваются эквивалентные формулировки бинарной проблемы Гольдбаха в терминах множеств тавтологий последовательностей логических матриц и отдельных логических матриц. При этом существенную роль играют понятия тавтологий логических матриц, а также произведений и сумм логических матриц из последовательности K_{n+1} (матриц Карпенко). Таким образом, в статье дается вариант ответа на поставленный А.С. Карпенко вопрос о возможности наличия связи между подобными K_{n+1} последовательностями матриц и отдельными логическими матрицами и известной как бинарное утверждение Гольдбаха открытой проблемой: всякое четное натуральное число $n \geq 4$ может быть представлено в виде суммы двух простых чисел (G_2). Доказано утверждение о том, что всякая конечнозначная матрица в построенной последовательности M имеет тавтологии, если и только если G_2 является истинным. С использованием свойств операции произведения матриц доказано, что бесконечнозначная матрица $M\otimes$ имеет тавтологии, если и только если G_2 истинно. Показано, что G_2 эквивалентна верности утверждения о равенстве множества тавтологий матрицы $M\otimes$, образующего заданную этой матрицей логическую теорию, и логической теории, определенной в терминах множеств тавтологий конечнозначных логик Лукасевича Ł$_n$. Данные результаты распространены на последовательности матриц и произведения матриц из таких последовательностей, входящие в довольно широкую совокупность классов матриц. За счет этого установлено, что построения с использованием последовательности K_{n+1} могут рассматриваться в качестве частного случая построений в данных классах. Проблема Гольдбаха таким образом приобретает логические аспекты, так как вопрос о ее истинности или ложности теперь сводится к вопросу о непустоте определенной логической теории.

Ключевые слова: многозначная логика, логические матрицы, тавтологии, проблема Гольдбаха

1. Введение

В данной статье приводится ряд эквивалентных формулировок проблемы Гольдбаха в терминах множеств тавтологий последовательностей логических матриц и отдельных логических матриц.

Христиан Гольдбах поставил названную его именем проблему в письме к Леонарду Эйлеру в 1742 году (см., например, [13]). В настоящее время она известна в двух вариантах – бинарном и тернарном. Под бинарным утверждением Гольдбаха понимается следующая гипотеза: всякое четное натуральное число $n \geq 4$ может быть представлено в виде суммы двух простых чисел. В дальнейшем это утверждение будет обозначаться G_2. Тернарный вариант проблемы Гольдбаха (сокращенно – G_3) представляет собой утверждение: всякое нечетное натуральное число $m \geq 7$ может быть представлено в виде суммы трех простых чисел.

Поскольку всякое нечетное натуральное число $m \geq 7$ может быть представлено в виде $2k + 3$, очевидно, что истинность G_2 влечет истинность G_3. При этом импликация в обратную сторону может оказаться ложной. В данной статье будет рассматриваться только бинарный вариант утверждения, но все приводимые результаты могут быть легко обобщены и на тернарную версию.

Полное доказательство тернарной проблемы Гольдбаха было представлено Харальдом Хельфготтом в 2013 году ([8] и [9]). В книге [5, с. 39] о текущем положении дел с продолжающимися свыше 250 лет усилиями по доказательству бинарной гипотезы Гольдбаха говорится: «В последнее время в работе над ней достигнут колоссальный прогресс, но полностью она пока не решена».

Вопрос о возможной связи между логическими матрицами и проблемой Гольдбаха был поставлен А.С. Карпенко в [1] и [10].

Различные многозначные логики и соответствующие им логические матрицы подробно исследуются в монографиях [2] и [4].

2. Логические матрицы, тавтологии и функциональная эквивалентность

В дальнейших построениях нам потребуется ряд определений и результатов. В частности, ключевую роль для рассматриваемых вопросов играют понятия логической матрицы, пропозициональной тавтологии и функциональной эквивалентности.

Определение 1. Логической матрицей называется упорядоченная тройка

$$\mathfrak{M} = \langle A, F, D \rangle ,$$

где:

- A есть множество, называемое носителем матрицы;
- $F = \{f_1^{k_1}, f_2^{k_2}, \ldots, f_m^{k_m}\}$ есть множество всюду определенных функций

  $$f_i^{k_i} : A^{k_i} \to A$$

  для всех $1 \leq i \leq m$;

- $D \subset A$ есть непустое множество выделенных значений (или элементов) матрицы.

Определение 2.

- Пропозициональной тавтологией (или просто тавтологией) в матрице $\mathfrak{M}$ называется такая формула φ стандартного пропозиционального языка[1], что выраженная данной формулой функция принимает значения из D на любых наборах значений входящих в нее переменных из A.

- Множество всех тавтологий матрицы $\mathfrak{M}$ будем в дальнейшем обозначать $E(\mathfrak{M})$.

Определение 3. Матрицы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ с общим множеством-носителем A называются функционально эквивалентными (нотация: $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$), если выполняются два условия:

- для всякой функции $f_i^{k_i}$ $(1 \leq i \leq m_1)$ из $\mathfrak{M}_1$ существует такая формула $\varphi(x_1, \ldots, x_{k_i})$ языка матрицы $\mathfrak{M}_2$, что соответствующая ей функция равна $f_i^{k_i}$;

- для всякой функции $g_i^{q_i}$ $(1 \leq i \leq m_2)$ из $\mathfrak{M}_2$ существует такая формула $\psi(x_1, \ldots, x_{q_i})$ языка матрицы $\mathfrak{M}_1$, что соответствующая ей функция равна $g_i^{q_i}$.

Полезно отметить, что функционально эквивалентные матрицы являются различными вариантами задания одного и того же множества функций, поскольку, согласно определению, множества выразимых в них функций совпадают. Функциональная эквивалентность двух матриц, множества выделенных элементов которых совпадают, означает также возможность отождествления множеств тавтологий данных матриц относительно определенной особым образом функции перевода выражений языка одной матрицы в язык другой и наоборот. Более подробную информацию об этом можно почерпнуть в работах [18], [15], [16] и [7].

И в частности, если $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$, $D_1 = D_2$, то:

$$E(\mathfrak{M}_1) \neq \varnothing \Leftrightarrow E(\mathfrak{M}_2) \neq \varnothing.$$

[1] Стандартным называется язык, все правильно построенные выражения которого конечны и сконструированы из счетнобесконечного набора различных пропозициональных переменных с помощью знаков функций из F.

3. Последовательности логических матриц и теоремы Карпенко

В качестве конкретных примеров логических матриц можно привести конечнозначные логики Лукасевича. При этом для каждого натурального n определяется отдельная матрица $Ł_{n+1}$, называемая $n+1$-значной логикой Лукасевича. Исторически логики Лукасевича были впервые рассмотрены Яном Лукасевичем, начиная как минимум с 1918 года (см. [11] и [12]).

Определение 4. Конечнозначной логикой Лукасевича называется логическая матрица

$$Ł_{n+1} = \langle V_{n+1}, \sim, \to, \{n\} \rangle ,$$

где:

- $V_{n+1} = \{0, 1, \ldots, n\}$;
- $\sim x = n - x$;
- $$x \to y = \begin{cases} n, & \text{если } x \leq y; \\ n - x + y, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

А.С. Карпенко в [3] была построена последовательность обладающих поистине удивительными свойствами матриц K_{n+1} $(n \geq 3)$. Приведем их определение.

Определение 5. Матрицей Карпенко будем называть логическую матрицу

$$K_{n+1} = \left\langle V_{n+1}, \sim, \to^K, \{n\} \right\rangle ,$$

где:

- $V_{n+1} = \{0, 1, \ldots, n\}$;
- $\sim x = n - x$;
- $$x \to^K y = \begin{cases} y, & \text{если } 0 < x < y < n \text{ и } (x, y) \neq 1; \\ y, & \text{если } 0 < x = y < n; \\ x \to y, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

В этом определении запись $(x, y) \neq 1$ означает, что числа x и y не являются взаимно простыми, то есть имеют отличные от единицы общие делители; а $x \to y$ есть значение соответствующей функции $Ł_{n+1}$.

Имеется ряд результатов о связи между конечнозначными логиками Лукасевича и простыми числами (множество всех простых чисел будет обозначаться Π). Так, В.К. Финном в [6] доказано, что логика $Ł_{n+1}$ предполна, если и только если $n \in \Pi$.

Матрицы K_{n+1} с простыми числами и логиками Лукасевича связываются посредством двух доказанных А.С. Карпенко теорем (см. [1]), которые здесь приводятся без доказательства.

Теорема 1. *Для всякого натурального числа $n \geq 3$ верно утверждение*

$$n \in \Pi \Leftrightarrow E(K_{n+1}) \neq \varnothing.$$

Теорема 2. *Для всякого натурального числа $n \geq 3$ верно, что $n \in \Pi$, если и только если матрицы K_{n+1} и $Ł_{n+1}$ функционально эквивалентны.*

Отметим, что теорема 1 выводится из теоремы 2 и того факта, что $E(Ł_{n+1}) \neq \varnothing$ при всех $n \geq 2$, а одноэлементное множество $\{n\}$ является множеством выделенных значений как в K_{n+1}, так и в $Ł_{n+1}$.

4. Произведения и суммы логических матриц

Ключевую роль в дальнейших построениях играют определяющиеся следующим образом операции произведения и суммы логических матриц.

Определение 6. Произведением логических матриц

$$\mathfrak{M}_1 = \left\langle A_1, f_1^{k_1}, \ldots, f_m^{k_m}, D_1 \right\rangle$$

и

$$\mathfrak{M}_2 = \left\langle A_2, g_1^{k_1}, \ldots, g_m^{k_m}, D_2 \right\rangle$$

называется матрица

$$\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 = \left\langle A_1 \times A_2, h_1^{k_1}, \ldots, h_m^{k_m}, D_1 \times D_2 \right\rangle,$$

где для всех i $(1 \leq i \leq m)$ верно:

$$h_i^{k_i}(<a_1^1, a_2^1>, <a_1^2, a_2^2>, \ldots, <a_1^{k_i}, a_2^{k_i}>) = <f_i^{k_i}(a_1^1, \ldots, a_1^{k_i}), g_i^{k_i}(a_2^1, \ldots, a_2^{k_i})>.$$

Определение 7. Суммой логических матриц $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ называется матрица

$$\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 = \left\langle A_1 \times A_2, h_1^{k_1}, \ldots, h_m^{k_m}, D' \right\rangle,$$

где $h_i^{k_i}$ для всех i $(1 \leq i \leq m)$ определяются так же, как и в произведении, а

$$D' = \{<a_1, a_2> : a_1 \in D_1 \vee a_2 \in D_2\}.$$

Замечание 1.

- Из определения операции произведения матриц следует, что для любого семейства $\{\mathfrak{M}_i : i \in \alpha\}$ (α – конечный или бесконечный ординал) логических матриц выполняется
$$E(\otimes_{i=1}^{\alpha}\mathfrak{M}_i) \neq \varnothing,$$
если и только если для всякого $i \in \alpha$ верно, что $E(\mathfrak{M}_i) \neq \varnothing$.

- Аналогично, из определения операции суммы матриц следует, что для любого семейства $\{\mathfrak{M}_i : i \in \alpha\}$ (α – конечный или бесконечный ординал) логических матриц, выполняется
$$E(\oplus_{i=1}^{\alpha}\mathfrak{M}_i) \neq \varnothing,$$
если и только если существует такое $i \in \alpha$, что $E(\mathfrak{M}_i) \neq \varnothing$.

5. Утверждения о последовательностях логических матриц, их суммах и произведениях

Применение операций суммы и произведения к конечным и бесконечным множествам (или последовательностям) логических матриц позволяет сформулировать основные результаты данной статьи. При этом характеристики множеств тавтологий результирующих матриц определяются свойствами этих операций, приведенными в замечании 1, а также утверждениями теорем 1 и 2.

В дальнейшем до конца раздела будем считать, что K_3 есть Ł$_3$.

С учетом этой оговорки рассмотрим последовательность матриц
$$M = \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4, \ldots,$$
где $\mathfrak{M}_2$ есть Ł$_3$, и при $3 \leq j < \omega$:
$$\mathfrak{M}_j = \oplus_{i=2}^{j}(K_{i+1} \otimes K_{2j-i+1}).$$

Замечание 2. Каждая матрица $\mathfrak{M}_j$ ($3 \leq j < \omega$) последовательности M в контексте проблемы Гольдбаха представляет четное число $2j$. Например:
$$\mathfrak{M}_3 = (K_3 \otimes K_5) \oplus (K_4 \otimes K_4)$$
и
$$\mathfrak{M}_4 = (K_3 \otimes K_7) \oplus (K_4 \otimes K_6) \oplus (K_5 \otimes K_5) \text{ и т. д.}$$

Здесь каждое слагаемое соответствует одному из представлений числа $2j$ в виде суммы двух меньших чисел i и $2j-i$, а вся сумма дает полный перебор таких возможных пар, сопоставленных парам матриц K_{i+1} и K_{2j-i+1} соответственно.

Это позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Множества $E(\mathfrak{M}_j)$ последовательности M непусты при всех j $(2 \leq j < \omega)$, если и только если утверждение G_2 истинно.*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$

Допустим, что для всякого j $(2 \leq j < \omega)$ множество $E(\mathfrak{M}_j)$ непусто.

Поскольку $E(\mathfrak{M}_j) \neq \varnothing$, то, по определению суммы логических матриц, существует такое i $(2 \leq i \leq j)$, что слагаемое вида $K_{i+1} \otimes K_{2j-i+1}$ имеет тавтологии. Отсюда, по определению произведения логических матриц, следует, что как $E(K_{i+1})$, так и $E(K_{2j-i+1})$ непусты. Это, по теореме 1, означает, что как i, так и $2j - i$ являются простыми числами. Очевидно, что $2j = i + 2j - i$, то есть утверждение гипотезы Гольдбаха верно для числа $2j$.

Поскольку матрицы в последовательности M представляют все четные натуральные числа вида $2j$ при $j \geq 2$, то утверждение G_2 истинно.

Доказательство $(\Rightarrow)$ завершено.

$(\Leftarrow)$

Допустим, что утверждение G_2 истинно и существует такое j $(2 \leq j < \omega)$, что $E(\mathfrak{M}_j) = \varnothing$.

Поскольку множество $E(\mathfrak{M}_j)$ пусто, то, по определению суммы логических матриц, для любого i $(2 \leq i \leq j)$ слагаемые вида $K_{i+1} \otimes K_{2j-i+1}$ не имеют тавтологий. Это, в силу определения произведения матриц, означает, что либо $E(K_{i+1}) = \varnothing$, либо $E(K_{2j-i+1}) = \varnothing$. Но тогда, по теореме 1, по крайней мере одно из чисел i и $j - i$ не является простым. То есть число $2j$ является контрпримером для G_2, что противоречит допущению.

Доказательство $(\Leftarrow)$ завершено. □

Рассмотрим теперь матрицу

$$M\otimes = \mathfrak{M}_2 \otimes \mathfrak{M}_3 \otimes \ldots = \otimes_{j=2}^{\omega} \mathfrak{M}_j.$$

Для этой матрицы выполняется следующее утверждение.

Теорема 4. *Множество $E(M\otimes)$ непусто, если и только если утверждение G_2 истинно.*

Доказательство. Доказательство следует из предыдущей теоремы и определения произведения логических матриц. □

Замечание 3. Множество $E(M\otimes)$ в терминах множеств тавтологий матриц Карпенко может быть выражено следующим образом:

$$E(Ł_3) \cap \bigcap_{j=3}^{\omega}(\bigcup_{i=2}^{j}(E(K_{i+1}) \cap E(K_{2j-i+1}))).$$

С учетом этого факта утверждение Гольдбаха верно, если и только если выполняется равенство:

$$E(M\otimes) = E(Ł_3) \cap \bigcap_{j=3}^{\omega}(\bigcup_{r=1}^{k_j}(E(Ł_{i_r+1}) \cap E(Ł_{2j-i_r+1}))),$$

где

$$k_j = |\{<i, 2j-i> : 2 \leq i \leq j \wedge i \in \Pi \wedge 2j-i \in \Pi\}|,$$

а в бесконечное пересечение включаются только случаи с $k_j \neq 0$.

6. Утверждения о классах логических матриц

Теоремы 3 и 4 носят довольно конкретный характер и могут быть обобщены до утверждений о достаточно широкой совокупности классов логических матриц, удовлетворяющих весьма «компактному» набору условий.

С этой целью рассмотрим класс $\mathcal{A}$ логических матриц, удовлетворяющий двум условиям:

- $\mathcal{A}$ замкнут относительно конечных и бесконечных сумм и произведений его элементов;
- В $\mathcal{A}$ имеются, по крайней мере, две матрицы $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ такие, что $E(\mathfrak{N}_1) = \varnothing$ и $E(\mathfrak{N}_2) \neq \varnothing$.

Пусть $[\mathfrak{N}_1]$ есть класс всех матриц из $\mathcal{A}$, множества тавтологий которых пусты. Класс матриц с непустыми множествами тавтологий соответственно будем обозначать $[\mathfrak{N}_2]$.

Пусть теперь

$$M = \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4, \ldots$$

есть последовательность матриц $\mathfrak{M}_j \in \mathcal{A}$ таких, что для всякого натурального числа $j \geq 2$ верно:

- $\mathfrak{M}_j \in [\mathfrak{N}_2]$, если $k_j \neq 0$;
- $\mathfrak{M}_j \in [\mathfrak{N}_1]$ в противном случае.

По аналогии с предыдущим разделом $M\otimes$ есть $\otimes_{j=2}^{\omega}\mathfrak{M}_j$. В этом случае верны следующие утверждения.

Теорема 5. *Множества тавтологий матриц $\mathfrak{M}_j \in \mathcal{A}$, образующих последовательность M, непусты для всякого $2 \leq j < \omega$, если и только если утверждение G_2 истинно.*

Доказательство. Истинность теоремы является непосредственным следствием определений класса $\mathcal{A}$, числа k_j и последовательности M. $\square$

Теорема 6. *Множество тавтологий логической матрицы $M\otimes$ непусто, если и только если утверждение G_2 истинно.*

Доказательство. Истинность теоремы является непосредственным следствием определений класса $\mathcal{A}$, числа k_j, последовательности M и свойств произведения логических матриц. $\square$

Рассмотрим последовательность

$$K = \mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4, \mathfrak{K}_5, \ldots$$

логических матриц из $\mathcal{A}$ такую, что выполняются два условия:

- $\mathfrak{K}_{r+1} \in [\mathfrak{N}_2]$, если $r \in \Pi$;
- $\mathfrak{K}_{r+1} \in [\mathfrak{N}_1]$, если иначе.

Отметим, что последовательность матриц K_{n+1} (матриц Карпенко) является частным случаем только что определенных последовательностей.

Если теперь $M = \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4, \ldots$ и

$$\mathfrak{M}_j = \oplus_{i=2}^{j}(\mathfrak{K}_{i+1} \otimes \mathfrak{K}_{2j-i+1}),$$

где $j \geq 2$, то:

$$E(M\otimes) = \bigcap_{j=2}^{\omega}(\bigcup_{i=2}^{j}(E(\mathfrak{K}_{i+1}) \cap E(\mathfrak{K}_{2j-i+1}))).$$

Таким образом, гипотеза Гольдбаха имеет эквивалентную формулировку в виде утверждения о непустоте множества тавтологий в матрице из достаточно широко определенного класса $\mathcal{A}$ логических матриц.

Сама гипотеза Гольдбаха получает «логическое измерение», поскольку вопрос о ее истинности теперь становится вопросом о существовании логической теории с определенным набором свойств. Причем это утверждение может быть отнесено не только к G_2, но и к G_3. За счет модификации определений матриц последовательности M может быть построена логическая теория, характеризующая G_3. И в силу истинности G_3 соответствующая такой последовательности матрица $M\otimes$ имеет непустое множество тавтологий.

Отметим, что класс $\mathcal{A}$ является собственным, и это означает, что его «размеры» просто чудовищны. Так, например, мощность $\mathcal{A}$ не может быть охарактеризована никаким кардиналом κ.

Предположим, что $|\mathcal{A}| = \kappa$. В этом случае, в духе замечания 1, рассмотрим произведение всех элементов $\mathfrak{M}_i \in \mathcal{A}$, где $i < \alpha$, а α есть изоморфный κ ординал.

Тогда, по наложенным на $\mathcal{A}$ условиям, $\otimes_{i=1}^{\alpha}\mathfrak{M}_i \in \mathcal{A}$. Но это противоречит допущению о существовании взаимнооднозначного соответствия между $\mathcal{A}$ и κ, поскольку данная матрица не совпадает ни с одной из сопоставленных κ матриц из $\mathcal{A}$.

Это указывает на довольно нетривиальный комбинаторный характер подобных G_2 арифметических утверждений.

Литература

[1] *Карпенко А.С.* Логики Лукасевича и простые числа. М.: Наука, 2007. 256 с.

[2] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: URSS. 2010. 444 с.

[3] *Карпенко А.С.* Характеристическая матрица для простых чисел // 6-я Всесоюзная конференция по математической логике: Тез. докл. Тбилиси, 1982. С. 76.

[4] *Карпенко А.С., Томова Н.Е.* Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. 110 с.

[5] *Стюарт И.* Величайшие математические задачи. М.: АНФ, 2016. 460 с.

[6] *Финн В.К.* Логические проблемы информационного поиска. М.: Наука, 1976. 152 с.

[7] *Feitosa H.A., D'Ottaviano I.M.L.* Conservative Translations // Annals of Pure and Applied Logic. 2001. Vol. 108(1). P. 205–227.

[8] *Helfgott H.A.* The Ternary Goldbach Conjecture // La Gaceta de la Real Sociedad Matematica Espanola. 2013. Vol. 16(4). P. 709–726.

[9] *Helfgott H.A.* The Ternary Goldbach Conjecture is True // arXiv. 2013. preprint arXiv:1312.7748 (дата обращения: 24.04.2018).

[10] *Karpenko A.S.* Łukasiewicz Logics and Prime Numbers. Luniver Press, 2006. 168 c.

[11] *Łukasiewicz J.* Selected Works. North-Holland & PWN, Amsterdam & Warszawa, 1970.

[12] *Łukasiewicz J.* O logice trojwartosciowey // Ruch Filozoficzny. 1920. Vol. 5. S. 170–171.

[13] *Wang Y.* Goldbach Conjecture. Singapore: World Scientific Publ, 1984. 329 p.

[14] *Wojcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 p.

[15] *Wojtylak P.* Mutual Interpretability of Sentential Logic I // Reports on Mathematical Logic. 1981. Vol. 11. P. 69–89.

[16] *Wojtylak P.* Mutual Interpretability of Sentential Logic II // Reports on Mathematical Logic. 1981. Vol. 12. P. 51–66.

Nikolai N. Prelovskiy

Logical Matrices and Goldbach Problem

Prelovskiy Nikolai Nikolaevich
Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences.
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: mingkemingfeichangming@gmail.com

The paper considers equivalent formulations of Goldbach conjecture in terms of sets of tautologies in sequences of logical matrices and single logical matrices. The significant part in this consideration belongs to concepts of tautology in a logical matrix, sums and products of logical matrices from sequence K_{n+1} of Karpenko matrices. Thus the paper proposes an answer to A.S. Karpenko's question about possible relations between sequences of logical matrices similar to K_{n+1} and an open problem, known as binary Goldbach conjecture: every even natural number $n \geq 4$ may be represented as a sum of two prime numbers. The proposition that all finite-valued matrices in the sequence M have tautologies iff the binary version of Goldbach conjecture (G_2) is true is proven. Using the properties of matrix product operation, it is proven that the infinite-valued matrix $M\otimes$ has tautologies iff G_2 is true. The paper also mentions that the set of tautologies of $M\otimes$ (id est the logical theory defined by $M\otimes$) is equal to the certain theory defined in terms of finite-valued Łukasiewicz logics Ł_n iff G_2 is true. These results were restated in terms of sequences of matrices and their products from a large class of logical matrices. Thus it was found out that G_2 has certain logical aspects, as it is equivalent to existence of defined non-empty logical theories.

Keywords: many-valued logics, logical matrices, tautologies, Goldbach conjecture

References

[1] Karpenko, A.S. *Logiki Lukasevicha i prostye chisla* [Lukasevich's logic and prime numbers]. M.: Nauka, 2007. 256 pp. (In Russian)

[2] Karpenko, A.S. *Razvitie mnogoznachnoi logiki* [The development of many-valued logic]. M.: URSS, 2010. 444 pp. (In Russian)

[3] Karpenko, A.S. "Kharakteristicheskaya matritsa dlya prostykh chisel" [Characteristic matrix for primes],in: *Shestaya Vsesoyuznaya konferentsiya po matematicheskoi logike: Tezisy dokladov* [Sixth All-Union Conference on Mathematical Logic: Abstracts], Tbilisi, 1982, pp. 76. (In Russian)

[4] Karpenko, A.S., Tomova, N.E. *Trekhznachnaya logika Bochvara i literal'nye paralogiki* [Three-valued logic of Bochvar and literal paralogics]. M.: IF RAN, 2016. 110 pp. (In Russian)

[5] Styuart, I. *Velichaishie matematicheskie zadachi* [Greatest mathematical problems]. Moscow: ANF, 2016, 460 pp. (In Russian)

[6] Finn, V.K. *Logicheskie problemy informatsionnogo poiska* [Logical problems of information retrieval]. M.: Nauka, 1976. 152 pp. (In Russian)

[7] Feitosa, H.A., "D'Ottaviano, I.M.L. Conservative Translations", *Annals of Pure and Applied Logic*, 2001, Vol. 108(1), pp. 205–227.

[8] Helfgott, H.A. "The Ternary Goldbach Conjecture", *La Gaceta de la Real Sociedad Matematica Espanola*, 2013, Vol. 16(4), pp. 709–726.

[9] Helfgott, H.A. The Ternary Goldbach Conjecture is True, in: *arXiv preprint*, 2013 [arXiv:1312.7748, accessed on 24.04.2018].

[10] Karpenko, A.S. *Łukasiewicz Logics and Prime Numbers*. Luniver Press, 2006. 168 pp.

[11] Łukasiewicz, J. *Selected Works*. North-Holland & PWN, Amsterdam & Warszawa, 1970.

[12] Łukasiewicz, J. "O logice trojwartosciowey", *Ruch Filozoficzny*, 1920, Vol. 5, pp. 170–171.

[13] Wang, Y. *Goldbach Conjecture*. Singapore: World Scientific Publ, 1984. 329 pp.

[14] Wojcicki, R. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 pp.

[15] Wojtylak, P. "Mutual Interpretability of Sentential Logic I", *Reports on Mathematical Logic*, 1981, Vol. 11, pp. 69–89.

[16] Wojtylak, P. "Mutual Interpretability of Sentential Logic II", *Reports on Mathematical Logic*, 1981, Vol. 12, pp. 51–66.