Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 46–61
УДК 16+510.64

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 46–61
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-46-61

Неклассическая логика
Non-classical Logic

А.А. Беликов

Семантики Войшвилло для некоторых расширений логики FDE: часть I

Посвящается
Елене Дмитриевне Смирновой и
Александру Степановичу Карпенко

Беликов Александр Александрович
Кафедра логики, философский факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова
Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4.
E-mail: `belikov@philos.msu.ru`

В настоящей статье исследуются семантики полуобобщенных описаний состояний, которые являются разновидностью информационной семантики Е.К. Войшвилло, предложенной им для первоуровневой релевантной логики (**FDE**) в начале восьмидесятых годов. Ключевой особенностью войшвилловского подхода является рассмотрение описаний состояний, на которые не налагаются классические условия о непротиворечивости и полноте, что позволяет определить релевантное отношение следования. Под релевантным отношением следования понимается такое, для которого не проходят классические парадоксы: $A \wedge {\sim}A \models B$ и $B \models A \vee {\sim}A$. Нами рассматриваются известные расширения логики **FDE**, сформулированные в терминах систем бинарных следований: трехзначная логика Клини, логика Приста и классическая логика. Первые две из них могут быть семантически определены при помощи полуобобщенных описаний состояний: для логики Клини вводится понятие $\top$-обобщенных описаний состояний (непротиворечивых, но неполных), для логики Приста используется понятие $\bot$-обобщенных описаний состояний (противоречивых, но полных). Отношение следования, порождающее логику Клини, определяется через сохранность истинности и не-ложности от посылки к заключению. В свою очередь, логика Приста определяется отношением следования через сохранность ложности и не-истинности от заключения к посылке. В статье предлагаются доказательства адекватности данных семантик указанным системам. В случае с классической логикой мы формулируем лишь набросок доказательства полноты и непротиворечивости относительно семантики с классическими описаниями состояний (непротиворечивыми и полными). Настоящая статья является первой частью исследования, посвященного семантикам Е.К. Войшвилло для расширений логики **FDE**.

Keywords: логика Клини, логика Приста, классическая логика, первоуровневая релевантная логика, описания состояний, информационная семантика

1. Введение

Семантика обобщенных описаний состояний была предложена Е. К. Войшвилло в связи с проблемой экспликации понятия релевантного следования. Главной методологической предпосылкой в решении данной проблемы можно считать стремление Евгения Казимировича эксплицировать следование как связь между высказываниями по включению *семантической информации*, которая понималась им как подлинное *логическое содержание* высказываний. Таким образом, данный подход в прямом смысле раскрывает термин «релевантного следования», в отличие от альтернативных подходов, например WGS-критерия, которые, по мнению Е.К. Войшвилло: «идут по линии тех или иных ограничений классического отношения $A \models B$...» [2].

Семантическая информация высказывания A содержится в определениях логических констант, входящих в это высказывание. Однако, как замечает Е. К. Войшвилло, в условия истинности для формул классической логики включаются дополнительные предпосылки онтологического характера, а именно о непротиворечивости и непустоте тех возможных миров, к которым относятся данные высказывания. В силу этих предпосылок мы не можем ухватить чистое логическое содержание высказываний, поскольку оно ограничено этими предпосылками, что влечет появление высказываний, не несущих никакой информации о возможном положении дел. Этими высказываниями и являются формулы, образующие парадоксы классического следования: $A \wedge {\sim}A$ и $A \vee {\sim}A$. Исходя из этой идеи, Войшвилло предлагает определять следование через включение семантической информации заключения в семантическую информацию посылки. Если множество ситуаций, в которых истинно высказывание A, обозначить как $\mathcal{M}_A$ и множество всех возможных ситуаций обозначить как $\mathcal{M}$, то семантической информацией высказывания A является пара $\langle \mathcal{M}_A, \mathcal{M} \rangle$. Другими словами, семантической информацией высказывания A является множество ситуаций, при которых оно истинно, относительно множества всех возможных ситуаций. В качестве этих «возможных ситуаций» Е.К. Войшвилло рассматривает описания состояний. Допустив тот факт, что $\mathcal{M}$ может быть бесконечным, становясь при этом универсальным для всех высказываний языка, мы можем записывать семантическую информацию произвольного высказывания A через $\mathcal{M}_A$. Тогда отношение следования трактуется как «семантическая информация B составляет часть семантической информации A», символически:

$$A \models B \Leftrightarrow \mathcal{M}_A \subseteq \mathcal{M}_B$$

Нетрудно убедиться в том, что при такой трактовке информации высказывания вида $A \wedge {\sim}A$ и $A \vee {\sim}A$ действительно либо не содержат информации вообще (в первом случае), либо содержат сразу всю возможную информацию (второй случай). Именно эти парадоксальные случаи и являются следствиями тех онтологических предпосылок, на которых мы сконцентрируемся в дальнейшем. И именно от них необходимо отказаться при построении семантики Войшвилло для преодоления парадоксов классического следования.

Е.Д. Смирнова в работе [5] предлагает обобщающий подход к построению семантик для интенсиональных логик. Там же рассматривается возможность расширения области применени семантики Е. К. Войшвилло на некоторый класс логик, а именно: логика Хао Вана (обозначим её **HW**), логика, двойственная логике Хао Вана (обозначим её **DHW**), и первоуровневый фрагмент логики Лукасевича. Заметим, что эта же идея высказывалась и самим Евгением Казимировичем в работе [2].

Целью же настоящей работы является строгая реализация этой идеи. Я сформулирую семантики Войшвилло, основанные на понятии *полуобобщенных описаний состояний*, и докажу их адекватность системам для первоуровневых фрагментов сильной трехзначной логики Клини $\mathbf{K}_3$ и логики Приста $\mathbf{P}_3$, которые дедуктивно эквивалентны системам для логики Хао Вана и логики, двойственной логике Хао Вана, соответственно. Ввиду тривиальности результата о том, что семантика с классическими описаниями состояний адекватна первоуровневому фрагменту классической логики **TV**, я сформулирую лишь набросок этого доказательства.

2. Семантика полуобобщенных описаний состояний для логик Клини, Приста и классической логики

Все исследуемые в данной работе логики основаны на пропозициональном языке $\mathcal{L}$, который мы определяем по форме Бакуса-Наура. Пусть $Prop$ обозначает множество всех пропозициональных переменных языка $\mathcal{L}$.

$$A := Prop \mid {\sim}A \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A).$$

Пусть $Form$ обозначает множество всех формул языка $\mathcal{L}$. Под функцией оценки будем понимать отображение $v\colon Prop \to \{t, f\}$. Множество $Literals = Prop \cup \{{\sim}p\colon p \in Prop\}$ есть множество *литералов*. Под описанием состояний будем понимать такое (возможно бесконечное) множество $\{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n\} \subseteq Literals$, где каждый $\tilde{p}_i$ является *литералом*. Множество всех описаний состояний обозначим через $States$.

Классическим описанием состояний будем называть такое описание состояний α, которое удовлетворяет следующим условиям:

I. $\forall p_i \in Prop \ \ (p_i \in \alpha \ \text{ или } \ {\sim}p_i \in \alpha)$;
II. $\forall p_i \in Prop \ \ \dot{\neg}(p_i \in \alpha \ \text{ и } \ {\sim}p_i \in \alpha)$.

Обобщенным описанием состояний будем называть такое описание состояний α, которое не удовлетворяет условиям (I) и (II), то есть может быть пустым и противоречивым.

Полуобобщенными описаниями состояний будем называть $\top$-*обобщенные описания состояний* и $\bot$-*обобщенные описания состояний.* В первых соблюдается условие (II), но не соблюдается условие (I); в последних же соблюдается условие (I), но не соблюдается условие (II).

Идея использования обобщенных описаний состояний для определения отношения следования между формулами первого уровня[1] впервые появляется в работе [1]. В дальнейшем она развивается в известной монографии [2]. Фактически предлагаемое отношение следования аксиоматизируется не менее известной системой **FDE**, возникшей в работах А. Андерсена и Н. Белнапа сначала под именем системы «тавтологических следствий» [9], [7], [6]. Адекватная алгебраическая семантика впервые предложена М. Данном в [11], где в качестве моделей используется четырехзначная решетка Де Моргана. Впоследствии этот результат был усилен в работе Х.М. Фонта [14], где доказано, что класс всех решеток Де Моргана является алгебраическим напарником логики Данна-Белнапа. К концу семидесятых годов идеи М. Данна получили развитие в его собственной работе [12] и работах Н. Белнапа [8], [10], где предлагается знаменитая четырехзначная семантика для системы «тавтологических следствий». Эту семантику принято относить к семантикам, построенным по так называемому *американскому плану.* Альтернативный подход развивался в работах Р. Раутли и Р. Мейера (см. [16], [17]), где предложена теоретико-множественная семантика для **FDE**. Подход Р. Раутли и Р. Мейера принято классифицировать, как семантики, построенные по *австралийскому плану.* В данном контексте семантику Е.К. Войшвилло можно рассматривать как разновидность теоретико-множественной семантики по американскому плану (см. [3]).

Воспроизведем семантику обобщенных описаний состояний для **FDE**. Запись $t \in v_\alpha(A)$ и $f \in v_\alpha(A)$ обозначает «формула A истинна в описании состояний α» и «формула A ложна в описании состояний α» соответственно.

Определение 1. (*Условия истинности для логики FDE.*) Определим функцию $v\colon States \times Prop \to \{\emptyset, \{t\}, \{f\}, \{t, f\}\}$. Будем использовать запись v_α для сокращения $v(\alpha, p_i)$, где $\alpha \in States$, $p_i \in Prop$.

$$t \in v_\alpha(p_i) \Leftrightarrow p_i \in \alpha;$$

[1] Формулы вида $A \to B$, где ни A, ни B не содержат $\to$. В рассматриваемой нами логике выражения $A \to B$ эквивалентны метаутверждениям о выводимости $A \vdash B$, где соответственно A и B содержат только связки $\wedge$, $\vee$, $\sim$. Далее по ходу статьи будет использована именно эта нотация. См., например: [3].

$$f \in \upsilon_\alpha(p_i) \Leftrightarrow {\sim}p_i \in \alpha.$$

Данная функция может быть распространена на множество всех формул нашего языка следующим образом:

$$t \in \upsilon_\alpha(A \wedge B) \Leftrightarrow t \in \upsilon_\alpha(A) \ \text{ и } \ t \in \upsilon_\alpha(B);$$
$$t \in \upsilon_\alpha(A \vee B) \Leftrightarrow t \in \upsilon_\alpha(A) \ \text{ или } \ t \in \upsilon_\alpha(B);$$
$$t \in \upsilon_\alpha({\sim}A) \Leftrightarrow f \in \upsilon_\alpha(A);$$
$$f \in \upsilon_\alpha(A \wedge B) \Leftrightarrow f \in \upsilon_\alpha(A) \ \text{ или } \ f \in \upsilon_\alpha(B);$$
$$f \in \upsilon_\alpha(A \vee B) \Leftrightarrow f \in \upsilon_\alpha(A) \ \text{ и } \ f \in \upsilon_\alpha(B);$$
$$f \in \upsilon_\alpha({\sim}A) \Leftrightarrow t \in \upsilon_\alpha(A).$$

Определение 2. $\forall A, B \in Form$
$A \models_{\mathbf{FDE}} B \Leftrightarrow \forall \alpha \in States\,(t \in \upsilon_\alpha(A) \Rightarrow t \in \upsilon_\alpha(B))$.

Условия истинности из определения 1 предполагают использование обобщенных описаний состояний.

Доказательство адекватности данной семантики системе **FDE** см. [2].

В работе [13] М. Данн описывает множество синтаксических расширений системы **FDE**, среди которых первоуровневые фрагменты сильной логики Клини $\mathbf{K}_3$, логики Приста $\mathbf{P}_3$, логики **RM** и классической логики **TV**[2]. Расширения эти определяются через присоединение к списку аксиомных схем **FDE** тех или иных комбинаций хорошо известных всем постулатов (более подробно см. [13]):

$$A \wedge {\sim}A \vdash B \qquad (absurdity)$$
$$B \vdash A \vee {\sim}A \qquad (triviality)$$
$$A \wedge {\sim}A \vdash B \vee {\sim}B \qquad (safety)$$

В настоящей работе для $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{P}_3$ и **TV** формулируются адекватные семантики, использующие полуобобщенные описания состояний (для $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{P}_3$) и классические описания состояний (для **TV**).

Условия истинности для логик $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{P}_3$ и **TV** идентичны тем, что представлены в определении 1. Единственная модификация заключается в наложении некоторых ограничений на множество описаний состояний в зависимости от того, с какой логикой мы работаем. Если в определении 1 используются $\top$-обобщенные описания состояний, то перед нами условия

[2] Семантики для этих и других многозначных логик исследуются в замечательной работе А. С. Карпенко [4].

истинности для $\mathbf{K}_3$. Если же используются $\perp$-обобщенные описания состояний, то перед нами условия истинности для $\mathbf{P}_3$. Ну а если мы ограничимся классическими описаниями состояний, то получим условия истинности для **TV**.

Для удобства воприятия последующих доказательств введем соответствующую нотацию. Пусть запись $|A|_\alpha = t$ является сокращением для ($t \in \upsilon_\alpha(A)$ и $f \notin \upsilon_\alpha(A)$), а запись $|A|_\alpha = f$ – для ($t \notin \upsilon_\alpha(A)$ и $f \in \upsilon_\alpha(A)$). Принятые обозначения позволяют сформулировать условия истинности для наших логик в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть υ_α есть функция оценки, определенная выше. Тогда для всякой оценки υ_α, для всякой формулы $A \in Form$ верно:*

$|{\sim}A|_\alpha = t \Leftrightarrow |A|_\alpha = f$;
$|{\sim}A|_\alpha = f \Leftrightarrow |A|_\alpha = t$;
$|A \wedge B|_\alpha = t \Leftrightarrow |A|_\alpha = t$ *и* $|B|_\alpha = t$;
$|A \wedge B|_\alpha = f \Leftrightarrow |A|_\alpha = f$ *или* $|B|_\alpha = f$;
$|A \vee B|_\alpha = t \Leftrightarrow |A|_\alpha = t$ *или* $|B|_\alpha = t$;
$|A \vee B|_\alpha = f \Leftrightarrow |A|_\alpha = f$ *и* $|B|_\alpha = f$.

Определим отношения следования.

Определение 3. $\forall A, B \in Form$
$A \models_{\mathbf{K_3}} B \Leftrightarrow \forall \alpha \in States\ (|A|_\alpha = t \Rightarrow |B|_\alpha = t)$.

Определение 4. $\forall A, B \in Form$
$A \models_{\mathbf{P_3}} B \Leftrightarrow \forall \alpha \in States\ (|B|_\alpha = f \Rightarrow |A|_\alpha = f)$.

Семантики, основанные на определениях 1, 3 и 4, будем называть *семантиками Войшвилло в слабом смысле.*

3. Аксиоматизация

В данной главе предлагается аксиоматизация рассматриваемых логик в виде систем бинарных следований. Этот способ формализации широко используется в логиках с обобщенными истинностными значениями (см. [18]), где он сформировался как универсальный метод на основе ранних работ по релевантной логике первого уровня [7], [6]. Однако в последних подобные исчисления фигурируют под именем «исчислений гильбертовского типа» или «формализмов гильбертовского типа». Стоит отметить, что в таком случае термин «исчисление гильбертовского типа» должен быть дополнен некоторой оговоркой. Как и в стандартном понимании этого термина, мы будем иметь дело с системами, состоящими из аксиом и правил вывода. Единственное отличие заключается в том, что мы будем работать с *аксиомами* не как с синтаксическими аналогами *тавтологий*, т. е. формул, которые принимают выделенное значение при любой интерпретации, а как с синтаксическими аналогами *валидных утверждений о следовании*, т. е. таких пар формул, где при приписывании выделенного значения одной из них (посылке), это же выделенное значение сохраняется у второй (заключения). Соответственно, правила вывода рассматриваются как кортежи *выводимостей*, т. е. отношений вида $A \vdash B$, со своими посылками и заключением; в этом случае корректность правила определяется естественным образом — если посылки являются теоремами исчисления, то и заключение является таковым.

Множество формул β называется *теорией в логике* L, если оно удовлетворяет условиям (1) и (2):

1. $A \in \beta$ и $B \in \beta \ \Rightarrow \ A \wedge B \in \beta$ (замыкание относительно конъюнкции);

2. Если $A \in \beta$ и $A \vdash_L B$, то $B \in \beta$ (замыкание относительно отношения выводимости).

Теория β называется *простой*, если она удовлетворяет условию:

3. $A \vee B \in \beta \ \Rightarrow \ A \in \beta$ или $B \in \beta$ (простота).

Теория β называется *непротиворечивой*, если она удовлетворяет условию:

4. $A \in \beta \ \Leftrightarrow \ \sim A \notin \beta$ (непротиворечивость).

Логической системой $\mathbf{K}_3$ назовем пару $(\mathcal{L}, \vdash_{\mathbf{K}_3})$, где $\mathcal{L}$ — используемый нами язык, а $\vdash_{\mathbf{K}_3}$ — рефлексивное отношение, которое удовлетворяет следующим постулатам и правилам:

$$a1.\ A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} A; \quad a2.\ A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} B; \quad a3.\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} A \vee B;$$

$$a4.\ B \vdash_{\mathbf{K}_3} A \vee B; \quad a5.\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim\sim A; \quad a6.\ \sim\sim A \vdash_{\mathbf{K}_3} A;$$

$$a7.\ A \wedge (B \vee C) \vdash_{\mathbf{K}_3} (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \quad a8.\ \sim (A \wedge B) \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim A \vee \sim B;$$

$$a9.\ \sim A \vee \sim B \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim (A \wedge B); \quad a10.\ \sim (A \vee B) \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim A \wedge \sim B;$$

$$a11.\ \sim A \wedge \sim B \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim (A \vee B); \quad a12.\ A \wedge \sim A \vdash_{\mathbf{K}_3} B;$$

$$r1.\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} B;\ B \vdash_{\mathbf{K}_3} C \,/\, A \vdash_{\mathbf{K}_3} C;$$

$$r2.\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} B;\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} C \,/\, A \vdash_{\mathbf{K}_3} B \wedge C;$$

$$r3.\ A \vdash_{\mathbf{K}_3} C;\ B \vdash_{\mathbf{K}_3} C;\ /\ A \vee B \vdash_{\mathbf{K}_3} C.$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. $\forall A, B \in Form$
$(A \vdash_{\mathbf{K}_3} B) \Leftrightarrow (A \vdash_{\mathbf{HW}} B)$.

Доказательство. Возьмем формулировку **HW** из [5]. Утверждение теоремы можно разбить на два утверждения:

$$
\begin{array}{l}
(a).\ (A \vdash_{\mathbf{HW}} B) \Rightarrow (A \vdash_{\mathbf{K}_3} B); \\
(b).\ (A \vdash_{\mathbf{K}_3} B) \Rightarrow (A \vdash_{\mathbf{HW}} B).
\end{array}
$$

Чтобы доказать утверждение (a), достачно предъявить доказательства в системе $\mathbf{K}_3$ двух теорем, а именно: $A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} B \wedge A$ и $A \vee B \vdash_{\mathbf{K}_3} B \vee A$. Первая получается последовательным применением $a2$, $a1$ и правила $r2$, вторая получается с использованием $a4$, $a3$ и $r3$. Для доказательства (b) требуется придъявить доказательства в системе **HW** других двух теорем: $B \vdash_{\mathbf{HW}} A \vee B$ и $A \wedge B \vdash_{\mathbf{HW}} B$. Первая получается последовательным применением $A1$, $A2$ и $R3$, вторая получается с использованием $A4$, $A3$ и $R3$. $\square$

Определение 5. Для всякой $p_i \in Prop$ и для всякой простой теории β в логике L определим каноническую оценку $|.|^c_\beta$:

1. $|p_i|^c_\beta = t \Leftrightarrow p_i \in \beta$ и $\sim p_i \notin \beta$;
2. $|p_i|^c_\beta = f \Leftrightarrow p_i \notin \beta$ и $\sim p_i \in \beta$.

Лемма 2. *Пусть $|.|^c_\beta$ – каноническая оценка для логики $\mathbf{K}_3$. Тогда для всяких $A \in Form$ верно, что:*

1. $|A|^c_\beta = t \Leftrightarrow A \in \beta$ *и* $\sim A \notin \beta$;
2. $|A|^c_\beta = f \Leftrightarrow A \notin \beta$ *и* $\sim A \in \beta$.

Доказательство ведем индукцией по числу логических связок в формулу. Базисный случай, когда формула A является пропозициональной переменной, справедлив в силу Определения 5. Индуктивное допущение: пусть утверждение леммы справедливо для формул с числом связок меньше s, где s – число связок в рассматриваемой формуле.

(1). $\Rightarrow$. Пусть $|\sim A|^c_\beta = t$. Тогда по определению 1 получаем $|A|^c_\beta = f$. Отсюда по индуктивному допущению получаем $\sim A \in \beta$ и $A \notin \beta$. Используя $a6$. $\sim\sim A \vdash_{\mathbf{K}_3} A$ и определение простой теории, получаем $\sim\sim A \notin \beta$.

(1). $\Leftarrow$. Пусть $\sim A \in \beta$ и $\sim\sim A \notin \beta$. Из того, что $\sim\sim A \notin \beta$, с использованием $a5$. $A \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim\sim A$ и определения простой теории, получаем $A \notin \beta$.

По индуктивному допущению получаем $|A|^c_\beta = f$. Отсюда по определению 1 получаем $|{\sim}A|^c_\beta = t$.

(2). $\Rightarrow$. Пусть $|{\sim}A|^c_\beta = f$. Тогда по определению 1 получаем $|A|^c_\beta = t$. Отсюда по индуктивному допущению получаем $A \in \beta$ и ${\sim}A \notin \beta$. Используя $a5$. $A \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}{\sim}A$ и определение простой теории, получаем ${\sim}{\sim}A \in \beta$.

(2). $\Leftarrow$. Пусть ${\sim}{\sim}A \in \beta$ и ${\sim}A \notin \beta$. Используя $a6$. ${\sim}{\sim}A \vdash_{\mathbf{K}_3} A$ и определение простой теории, получаем $A \in \beta$. Тогда по индуктивному допущению получаем $|A|^c_\beta = t$. Отсюда по определению 1 получаем $|{\sim}A|^c_\beta = f$.

(3). $\Rightarrow$. Пусть $|A \wedge B|^c_\beta = t$. Тогда по определению 1 получаем $|A|^c_\beta = t$ и $|B|^c_\beta = t$. Отсюда по индуктивному допущению получаем $A \in \beta$ и ${\sim}A \notin \beta$, а также $B \in \beta$ и ${\sim}B \notin \beta$. Из этого по определению простой теории получаем, что $A \wedge B \in \beta$. Из того, что ${\sim}A \notin \beta$ и ${\sim}B \notin \beta$, получаем ${\sim}A \vee {\sim}B \notin \beta$. Используя $a8$. ${\sim}(A \wedge B) \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}A \vee {\sim}B$ и определение простой теории, получаем ${\sim}(A \wedge B) \notin \beta$.

(3). $\Leftarrow$. Пусть $A \wedge B \in \beta$ и ${\sim}(A \wedge B) \notin \beta$. Из того, что $A \wedge B \in \beta$, по определению простой теории, получаем $A \in \beta$ и $B \in \beta$. Из того, что ${\sim}(A \wedge B) \notin \beta$, с использованием $a9$. ${\sim}A \vee {\sim}B \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}(A \wedge B)$ и определения простой теории, получаем ${\sim}A \vee {\sim}B \notin \beta$. Значит, ${\sim}A \notin \beta$ и ${\sim}B \notin \beta$. Таким образом, по индуктивному допущению получаем $|A|^c_\beta = t$ и $|B|^c_\beta = t$, откуда по определению 1 следует $|A \wedge B|^c_\beta = t$.

(4). $\Rightarrow$. Пусть $|A \wedge B|^c_\beta = f$. Тогда по определению 1 получаем $|A|^c_\beta = f$ или $|B|^c_\beta = f$. Разбор случаев.

Пусть $|A|^c_\beta = f$. Тогда по индуктивному допущению получаем ${\sim}A \in \beta$ и $A \notin \beta$. Используя $a3$. ${\sim}A \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}A \vee {\sim}B$, $a9$. ${\sim}A \vee {\sim}B \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}(A \wedge B)$, правило $r1$ и определение простой теории, получаем ${\sim}(A \wedge B) \in \beta$. А из того, что $A \notin \beta$, с использованием $a1$. $A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} A$ и определения простой теории, получаем $A \wedge B \notin \beta$.

Пусть $|B|^c_\beta = f$. Аналогично предыдущему случаю, мы получаем желаемые ${\sim}(A \wedge B) \in \beta$ и $A \wedge B \notin \beta$.

(4). $\Leftarrow$. Пусть ${\sim}(A \wedge B) \in \beta$ и $A \wedge B \notin \beta$. Используя $a8$. ${\sim}(A \wedge B) \vdash_{\mathbf{K}_3} {\sim}A \vee {\sim}B$ и определение простой теории, получаем ${\sim}A \vee {\sim}B \in \beta$, а следовательно, ${\sim}A \in \beta$ или ${\sim}B \in \beta$. Также по определению простой теории имеем $A \notin \beta$ или $B \notin \beta$. Разбор случаев.

Пусть ${\sim}A \in \beta$ и $A \notin \beta$. Тогда по индуктивному допущению получаем $|A|^c_\beta = f$. Отсюда по определению 1 получаем $|A \wedge B|^c_\beta = f$.

Пусть ${\sim}A \in \beta$ и $B \notin \beta$. Используя $a2$. $A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} B$ и определение простой теории, получаем $A \wedge B \notin \beta$, а значит $A \notin \beta$ и $B \notin \beta$. Из того, что $A \notin \beta$ и ${\sim}A \in \beta$ по индуктивному допущению получаем $|A|^c_\beta = f$. Отсюда по определению 1 получаем $|A \wedge B|^c_\beta = f$.

Пусть ${\sim}B \in \beta$ и $A \notin \beta$. Используя $a1$. $A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} A$ и определение простой теории, получаем $A \wedge B \notin \beta$, а значит $A \notin \beta$ и $B \notin \beta$. Из того, что

$B \notin \beta$ и $\sim B \in \beta$ по индуктивному допущению получаем $|B|^c_\beta = f$. Отсюда по определению 1 получаем $|A \wedge B|^c_\beta = f$.

Пусть $\sim B \in \beta$ и $B \notin \beta$. Аналогично первому случаю в этом пункте получаем желаемое $|A \wedge B|^c_\beta = f$.

Доказательство случая, когда формула A имеет вид $A \vee B$, проводится двойственным образом по отношению к случаям, когда $A = A \wedge B$. □

Лемма 3. *Если $A \nvdash_{\mathbf{K}_3} B$, то существует такая простая теория α, что $A \in \alpha$ и $\sim A \notin \alpha$, и $B \notin \alpha$.*

Доказательство.

Наша задача – описать процедуру конструирования максимальной теории. Будем использовать технику М. Данна из [13].

Перечислим все формулы рассматриваемого языка $A_0, A_1, A_2, \ldots$. Строим последовательность теорий, начиная с $\tau_0 = \{C \mid A \vdash_{\mathbf{K}_3} C\}$. Последующие теории строятся так:

1. если $\tau_n + A_{n+1} \vdash_{\mathbf{K}_3} B$, тогда $\tau_{n+1} = \tau_n$;
2. если $\tau_n + A_{n+1} \nvdash_{\mathbf{K}_3} B$, тогда $\tau_{n+1} = \tau_n \cup \{A_{n+1}\}$.

Результирующая максимальная теория τ получается через объединение всех τ_n-х. Факт того, что τ замкнута относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$, следует из условий её построения, поскольку каждая τ_n-я замкнута относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$.

Факт о том, что $B \notin \tau$ также следует из условий построения τ, поскольку в противном случае мы бы получили, что $A \vdash_{\mathbf{K}_3} B$, а это противоречит условию Леммы.

Допустим, что τ является противоречивой теорией. Тогда существует такая формула C, что $C \in \tau$ и $\sim C \in \tau$. Отсюда, в силу того, что τ замкнута относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$, используя $a12$, получаем $C \wedge \sim C \vdash_{\mathbf{K}_3} B$. В силу того, что τ замкнута относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$, получаем, что $B \in \tau$. Противоречие, поскольку ранее мы установили, что $B \notin \tau$.

Остается показать, что τ обладает свойством простоты. Предположим, что $D \vee E \in \tau$, но $D \notin \tau$ и $E \notin \tau$. Принимая во внимание условия построения τ_n-х, мы можем заключить, что $\tau + D \vdash_{\mathbf{K}_3} B$ и $\tau + E \vdash_{\mathbf{K}_3} B$. Следовательно, существует такая формула $C_1 \in \tau$, что $C_1 \wedge D \vdash_{\mathbf{K}_3} B$ и $C_1 \wedge E \vdash_{\mathbf{K}_3} B$. Применяя правило $r3$, получаем, что $(C_1 \wedge D) \vee (C_1 \wedge E) \vdash_{\mathbf{K}_3} B$, далее, с использованием $a7$ и правила $r1$, мы получим $C_1 \wedge (D \vee E) \vdash_{\mathbf{K}_3} B$. Отсюда, в силу того, что τ является теорией замкнутой относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$, мы получаем $B \in \tau$, что противоречит исходному допущению. □

Теорема 1. *(Полнота $\mathbf{K}_3$).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vDash_{\mathbf{K}_3} B) \Rightarrow (A \vdash_{\mathbf{K}_3} B)$.

Доказательство. Будем рассуждать по контрапозиции. Допустим, $A \nvdash_{\mathbf{K}_3} B$. Тогда по Лемме 3 получаем, что существует простая теория α, что $A \in \alpha$ и $\sim A \notin \alpha$, и $B \notin \alpha$. По Лемме 2 получаем, что $|A|_\alpha = t$ и $|B|_\alpha \neq t$. Отсюда, используя Определение 3, получаем, что $A \nvDash_{\mathbf{K}_3} B$. □

Теорема 2. *(Семантическая непротиворечивость* $\mathbf{K}_3$*).* $\forall A, B \in Form$ $(A \vdash_{\mathbf{K}_3} B) \Rightarrow (A \vDash_{\mathbf{K}_3} B)$.

Доказательство семантической непротиворечивости сводится к рутинной проверке того факта, что все аксиомы $\mathbf{K}_3$ являются валидными утверждениями о следовании, и правила вывода сохраняют это отношение.

Рассмотрим случай с аксиомой $a12$. $A \wedge \sim A \vdash_{\mathbf{K}_3} B$.

1. $A \wedge \sim A \not\models_{\mathbf{K}_3} B$ (допущение);
2. $|A \wedge \sim A|_\alpha = t$ и $|B|_\alpha \neq t$ (1, для некоторого α);
3. $|A|_\alpha = t$ и $|\sim A|_\alpha = t$ (2, Определение 1);
4. $|A|_\alpha = t$ и $|A|_\alpha = f$ (3, Определение 1);
5. $A \in \alpha$ и $\sim A \notin \alpha$ (4, Определение 1);
6. $A \notin \alpha$ и $\sim A \in \alpha$ (4, Определение 1).

Шаги 5 и 6 противоречат друг другу, значит, исходное допущение ошибочно, и $A \wedge \sim A \models_{\mathbf{K3}} B$.

Рассмотрим случай с правилом $r1$. $A \vdash_{\mathbf{K}_3} B$; $B \vdash_{\mathbf{K}_3} C$ / $A \vdash_{\mathbf{K}_3} C$.

Допустим, что $A \models_{\mathbf{K}_3} B$; $B \models_{\mathbf{K}_3} C$ и $A \not\models_{\mathbf{K}_3} C$. Из того, что $A \not\models_{\mathbf{K}_3} C$, по определению 3, получаем, что $|A|_\alpha = t$ и $|C|_\alpha \neq t$. Используя $|A|_\alpha = t$, определение 3, $A \models_{\mathbf{K}_3} B$ и $B \models_{\mathbf{K}_3} C$, легко получить $|C|_\alpha = t$, что приводит нас к противоречию. □

Следствием теорем 1 и 2 является:

Теорема 3. *(Адекватность* $\mathbf{K}_3$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vDash_{\mathbf{K}_3} B) \Leftrightarrow (A \vdash_{\mathbf{K}_3} B)$.

Логической системой $\mathbf{P}_3$ назовем пару $(\mathcal{L}, \vdash_{\mathbf{P}_3})$, где $\mathcal{L}$ - используемый нами язык, а $\vdash_{\mathbf{P}_3}$ - рефлексивное отношение, которое удовлетворяет следующим постулатам и правилам:

$$a1.\ A \wedge B \vdash_{\mathbf{P}_3} A; \quad a2.\ A \wedge B \vdash_{\mathbf{P}_3} B; \quad a3.\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} A \vee B;$$

$$a4.\ B \vdash_{\mathbf{P}_3} A \vee B; \quad a5.\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} \sim\sim A; \quad a6.\ \sim\sim A \vdash_{\mathbf{P}_3} A;$$

$$a7.\ A \wedge (B \vee C) \vdash_{\mathbf{P}_3} (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \quad a8.\ \sim (A \wedge B) \vdash_{\mathbf{P}_3} \sim A \vee \sim B;$$

$$a9.\ \sim A \vee \sim B \vdash_{\mathbf{P}_3} \sim (A \wedge B); \quad a10.\ \sim (A \vee B) \vdash_{\mathbf{P}_3} \sim A \wedge \sim B;$$

$$a11.\ {\sim}A \wedge {\sim}B \vdash_{\mathbf{P}_3} {\sim}(A \vee B); \quad a12.\ B \vdash_{\mathbf{P}_3} A \vee {\sim}A;$$

$$r1.\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} B;\ B \vdash_{\mathbf{P}_3} C\ /\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} C;$$

$$r2.\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} B;\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} C\ /\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} B \wedge C;$$

$$r3.\ A \vdash_{\mathbf{P}_3} C;\ B \vdash_{\mathbf{P}_3} C;\ /\ A \vee B \vdash_{\mathbf{P}_3} C.$$

Утверждение 2. $\forall A, B \in Form$
$(A \vdash_{\mathbf{P}_3} B) \Leftrightarrow (A \vdash_{\mathbf{DHW}} B)$.

Доказательство. Аналогично утверждению 1. □

Лемма 4. *Пусть* $|.|^c_\beta$ *– каноническая оценка для логики* $\mathbf{P}_3$*. Тогда для всяких* $A \in Form$ *верно, что:*

1. $|A|^c_\beta = t \Leftrightarrow A \in \beta$ *и* ${\sim}A \notin \beta$;
2. $|A|^c_\beta = f \Leftrightarrow A \notin \beta$ *и* ${\sim}A \in \beta$.

Доказательство.

Данная лемма доказывается аналогично Лемме 2.

□

Лемма 5. *Если* $A \nvdash_{\mathbf{P}_3} B$*, то существует простая теория* α*, что* $B \notin \alpha$ *и* ${\sim}B \in \alpha$*, и* $A \in \alpha$*.*

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично Лемме 3. □

Теорема 4. *(Полнота* $\mathbf{P}_3$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vDash_{\mathbf{P}_3} B) \Rightarrow (A \vdash_{\mathbf{P}_3} B)$.

Доказательство. Будем рассуждать по контрапозиции. Допустим $A \nvdash_{\mathbf{P}_3} B$. Тогда по Лемме 5 получаем, что существует простая теория α, что $B \notin \alpha$ и ${\sim}B \in \alpha$, и $A \in \alpha$. По Лемме 4 получаем, что $|B|_\alpha = f$ и $|A|_\alpha \neq f$. Отсюда, используя Определение 4, получаем, что $A \nvDash_{\mathbf{P}_3} B$. □

Теорема 5. *(Семантическая непротиворечивость* $\mathbf{P}_3$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vdash_{\mathbf{P}_3} B) \Rightarrow (A \vDash_{\mathbf{P}_3} B)$.

Доказательство. Аналогично теореме 2. □

Из теорем 4 и 5 следует:

Теорема 6. *(Адекватность* $\mathbf{P}_3$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vDash_{\mathbf{P}_3} B) \Leftrightarrow (A \vdash_{\mathbf{P}_3} B)$.

Аналогичный результат можно получить для системы классической логики. Её можно определить через добавление, например, к системе $\mathbf{K}_3$ аксиомы $B \vdash A \vee {\sim}A$. Для доказательства адекватности достаточно принять онтологические постулаты (I) и (II) для описаний состояний, задать следование по типу одного из определений 3 и 4, на базе таких же условий истинности, как в определении 1. Каноническая оценка определяется так же, как для $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{P}_3$. Аналог леммы Линденбаума выглядит следующим образом.

Лемма 6. *Допустим, что* $A \nvdash_{\mathbf{TV}} B$*. Тогда существует такая простая теория* θ*, что* $A \in \theta$ *и* ${\sim}A \notin \theta$*, и* $B \notin \theta$ *или* ${\sim}B \in \theta$*.*

Нетрудно доказать следующие теоремы.

Теорема 7. *(Полнота* $\mathbf{TV}$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vDash_{\mathbf{TV}} B) \Rightarrow (A \vdash_{\mathbf{TV}} B)$.

Теорема 8. *(Семантическая непротиворечивость* $\mathbf{TV}$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vdash_{\mathbf{TV}} B) \Rightarrow (A \vDash_{\mathbf{TV}} B)$.

Теорема 9. *(Адекватность* $\mathbf{TV}$*).* $\forall A, B \in Form$
$(A \vDash_{\mathbf{TV}} B) \Leftrightarrow (A \vdash_{\mathbf{TV}} B)$.

4. Заключение

Итак, выше сформулированы адекватные семантики полуобобщенных описаний состояний для логик $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{P}_3$ и, как следствие, для логик **HW** и **DHW**. Примечательно, что если задать следование с помощью определения 3, используя обобщенные описания состояний, то мы получим семантику для логики **ETL**. Семантически эта логика получается из **FDE**, если в качестве выделенного значения рассматривается только значение **T** («told Truth», см. [8]). Впервые эта логика возникает в работе [15]. Если же мы зададим следование с помощью определения 4, используя обобщенные описания состояний, то мы получим семантику для логики **NFL**. В работе [19] эта логика рассматривается как логика **FDE** с тремя выделенными значениями: **T** («told Truth»), **B** («told Truth and False»), **N** («neither Truth, nor False»). Доказательство адекватности семантик обобщенных описаний состояний для логик **ETL** и **NFL** будет представлено в продолжении настоящей статьи.

Литература

[1] *Войшвилло Е. К.* Логическое следование и семантика обобщенных описаний состояний // Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М.: Наука, 1984. С. 183–192.

[2] *Войшвилло Е. К.* Философско-методоловгические аспекты релевантной логики. М.: Изд-во МГУ, 1988. 140 с.

[3] *Зайцев Д. В.* Обобщенная релевантная логика и модели рассуждений. М.: Креативная экономика, 2010. 312 с.

[4] *Карпенко А. С.* Развитие многозначной логики. М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

[5] *Смирнова Е. Д.* Логика и философия. М.: РОССПЭН, 1996. 304 с.

[6] *Anderson A. R.*, *Belnap N. D. Jr.* Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, Vol. 1. Princeton: Princeton University Press, 1975. 543 p.

[7] *Anderson A. R.*, *Belnap N. D. Jr.* Tautological entailments // Philosophical Studies. 1962. Vol. 13. P. 9–24.

[8] *Belnap N. D. Jr.* How a computer should think // Contemporary Aspects of Philosophy / Ed. by G. Ryle. Oriel Press, 1977. P. 30–55.

[9] *Belnap N. D. Jr.* Tautological entailments (abstract) // Journal of Symbolic Logic. 1959. Vol. 24. P. 316.

[10] *Belnap N. D. Jr.* A useful four-valued logic // Modern Uses of Multiple-Valued Logic / Ed. by J. M. Dunn and G. Epstein. Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1977. P. 8–37.

[11] *Dunn J. M.* The Algebra of Intensional Logics. Ph. D. Dissertation. University of Pittsburgh. 1966. 177 p.

[12] *Dunn J. M.* Intuitive Semantics for first-degree entailments and coupled trees // Philosophical Studies. 1976. Vol. 26. P. 149–168.

[13] *Dunn J. M.* Partiality and Its Dual // Studia Logica. 2000. Vol. 66(1). P. 5–40.

[14] *Font J. M.* Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices // Logic Journal of IGPL. 1997. Vol. 5. Issue 3. P. 1–29.

[15] *Pietz A.*, *Rivieccio U.* Nothing but the Truth // Journal of Philosophical Logic. 2013. Vol. 42(1). P. 125–135.

[16] *Routley R.*, *Meyer R. K.* The Semantics of Entailment I // Truth, Syntax and Semantics / Ed. by H. Leblanc. Amsterdam. 1973. P. 194–243.

[17] *Routley R.*, *Routley V.* Semantics of first-degree entailment // Nous. 1972. Vol. 6. P. 335–359.

[18] *Shramko Y.*, *Wansing H.* Truth and falsehood: An inquiry into generalized logical values. Springer Science & Buiseness Media. Vol. 36. 2011. 246 p.

[19] *Shramko Y.*, *Zaitsev D.*, *Belikov A.* First-degree entailment and its relatives // Studia Logica. 2017. Vol. 105. № 6. P. 1291–1347.

Alexander A. Belikov

Vojshvillo-Style Semantics for Some Extensions of FDE: Part I

Belikov Alexander Alexandrovich
Lomonosov Moscow State University.
27/4 Lomonosovskij prospekt, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: belikov@philos.msu.ru

In this paper I examine the semantics of semi-generalized state descriptions - a kind of the informational semantics for logic of first-degree entailments (**FDE**) proposed by E. K. Vojshvillo in the early eighties. A key feature of the approach is to consider state descriptions, which do not satisfy the classic ontological conditions of consistency and completeness that allows to determine a relevant entailment. By relevant entailment we understand such a relation, that is free from the classical paradoxes: $A \wedge \sim A \models B$ and $B \models A \vee \sim A$. I consider well-known extensions of **FDE**, which are formulated in terms of binary consequence systems: three-valued Kleene logic, three-valued Priest logic and classical logic. The first two of these can be semantically defined using semi-generalized state descriptions: for Kleene logic I use $\top$-generalized state descriptions (consistent but incomplete), for Priest logic I use $\bot$-generalized state descriptions (inconsistent but complete). The entailment relation for Kleene logic defined in terms of truth-and-non-falsity preservation from the premise to the conclusion. In turn Priest logic determined by entailment relation defined through the preservation of falsity-and-non-truth from the conclusion to the premise. The paper includes proofs of the corresponding completeness and soundness theorems. In the case of classical logic, we provide only a sketch of completeness and soundness with respect to the semantics of classical state descriptions (consistent and complete). This article is the first part of studies on E. K. Vojshvillo semantics for different extensions of textbf FDE.

Keywords: Klenee logic, Priest logic, first-degree entailments, classical logic, generalized state descriptions

References

[1] Vojshvillo, E. "Logicheskoe sledovanie i semantika obobshhennyh opisanij sostojanij" [Logical consequence and semantics of generalized state descriptions], in: *Modal'nye i intensional'nye logiki i ih primenenie k problemam metodologii nauki* [Modal and Intensional Logic and Their Application to the Problems of the Methodology of Science], Moscow: Nauka, 1984, pp. 183–192. (In Russian)

[2] Vojshvillo, E. *Filosofsko-metodologicheskie aspekty relevantnoj logiki* [Philosophical-methodological aspects of relevance logic]. Moscow: MSU publishing, 1988. 140 pp. (In Russian)

[3] Zaitsev, D. *Obobshhennaja relevantnaja logika i modeli rassuzhdenij* [Generalized relevance logic and models of reasoning]. Moscow: Kreativnaja jekonomika, 2010. 312 pp. (In Russian)

[4] Karpenko, A. *Razvitie mnogoznachnoj logiki* [The Development of Many-Valued Logic]. Moscow: LKI, 2010. 448 pp. (In Russian)

[5] Smirnova, E. *Logika i filosofija* [Logic and Philosophy]. Moscow: ROSSPEN, 1996. 304 pp. (In Russian)

[6] Anderson, A. R., Belnap, N. D. Jr. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, Vol. 1. Princeton. Princeton University Press, 1975. 543 pp.

[7] Anderson, A. R., Belnap, N. D. Jr. "Tautological entailments", *Philosophical Studies*, 1962, Vol. 13, pp. 9–24.

[8] Belnap, N. D. Jr. "How a computer should think", in: *Contemporary Aspects of Philosophy*, ed. by G. Ryle. Oriel Press, 1977, pp. 30–55.

[9] Belnap, N. D. Jr. "Tautological entailments (abstract)", *Journal of Symbolic Logic*, 1959, Vol. 24, pp. 316.

[10] Belnap, N. D. Jr. "A useful four-valued logic", in: *Modern Uses of Multiple-Valued Logic. D. Reidel Publishing Company*, ed. by J. M. Dunn and G. Epstein. Dordrecht and Boston, 1977, pp. 8–37.

[11] Dunn, J. M. *The Algebra of Intensional Logics. Ph. D. Dissertation.* University of Pittsburgh, 1966. 177 pp.

[12] Dunn, J. M. "Intuitive Semantics for first-degree entailments and coupled trees", *Philosophical Studies*, 1976, Vol. 29, pp. 149–168.

[13] Dunn, J. M. "Partiality and Its Dual", *Studia Logica*, 2000, Vol. 66(1), pp. 5–40.

[14] Font, J. M. "Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices", *Logic Journal of IGPL*, 1977, Vol. 5, Issue 3, pp. 1–29.

[15] Pietz, A., Rivieccio, U. "Nothing but the Truth", *Journal of Philosophical Logic*, 2013, Vol. 42(1), pp. 125–135.

[16] Routley, R., Meyer, R. K. "The Semantics of Entailment I", in: *Truth, Syntax and Semantics*, ed. by H. Leblanc. Amsterdam, 1973. pp. 194–243.

[17] Routley, R., Routley, V. "Semantics of first-degree entailment", *Nous*, 1972, Vol. 6, pp. 335–359.

[18] Shramko, Y., Wansing, H. *Truth and falsehood: An inquiry into generalized logical values.* Springer Science & Buiseness Media. Vol. 36. 2011. 246 pp.

[19] Shramko, Y., Zaitsev, D., Belikov, A. "First-degree entailment and its relatives", *Studia Logica*, 2017, Vol. 105, No. 6, pp. 1291–1347 [https://doi.org/10.1007/s11225-017-9747-7 accessed on 21.04.2018].