Логические исследования
2018. Т. 24. № 1. С. 26–45
УДК 168.3

Logical Investigations
2018, Vol. 24, No. 1, pp. 26–45
DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-26-45

В.И. Шалак

Анализ vs дедукция

Шалак Владимир Иванович
Институт философии РАН.
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д.12, стр.1.
E-mail: shalack@gmail.com

В настоящей работе рассматриваются четыре вида задач, которые естественным образом возникают в связи с определением логического вывода: 1) проверка доказательства: $\Gamma\langle A_1, .., A_n\rangle A$; 2) поиск интересных следствий: $\Gamma\langle ...\rangle ?$; 3) поиск доказательства: $\Gamma\langle .?.\rangle A$; 4) поиск гипотез: $?\langle ...\rangle A$. В современной логике основное внимание уделяется задаче поиска доказательств. Ограничительные теоремы Гёделя имеют прямое к ней отношение. В то же время в реальной практике задача поиска гипотез, из которых следует целевое предложение, встречается гораздо чаще, чем задача поиска доказательства. Подробному ее исследованию и посвящена основная часть настоящей работы. Дано предложение A, и требуется найти множество гипотез (посылок) Γ, из которых оно логически выводимо. Выбор подходящих гипотез Γ происходит на основе логического анализа предложения A. Мы можем выделить шесть различных оснований для выбора этих гипотез: 1) принятие явных определений для предикатных и функциональных символов; 2) принятие неявных аксиоматических определений для предикатных и функциональных символов; 3) принятие ранее доказанных теорем; 4) принятие эмпирически истинных предложений; 5) принятие предложений, описывающих результат некоторого действия; 6) принятие правдоподобных гипотез, которые могут иметь отношение к решаемой задаче. В работе построено исчисление, которое формализует задачу аналитического поиска гипотез для данного целевого предложения.

Ключевые слова: решение задач, логический вывод, поиск доказательства, поиск гипотез, логическая редукция, аналитические таблицы, теория определений

Настоящая статья посвящена развитию идей аналитического подхода к решению задач, высказанных автором в [4, 7, 8]. Желание продолжить исследование в данном направлении укрепилось после ознакомления с работами К. Целлуччи [9, 10, 13, 14, 15, 11], взгляды которого на роль логики в процессе познания оказались очень близкими.

1. Логический вывод

«Первую Аналитику» Аристотель открывает словами о том, что его исследование посвящено доказательству и это дело доказывающей науки.

В настоящее время точка зрения, что центральным понятием логики является рассуждение, получила широкое распространение.

Логику можно определить как науку о хороших способах рассуждений. Под “хорошими” способами рассуждения при этом можно понимать такие, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты [3, с. 6].

Понятие рассуждения получает строгое уточнение в понятии логического вывода.

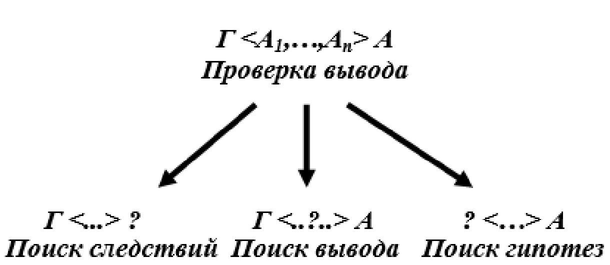
Выводом формулы A из множества посылок Γ называется непустая конечная последовательность формул $A_1, \dots, A_n (= A)$, каждая из которых является либо одной из посылок, либо получена из предшествующих формул последовательности по одному из правил вывода, и последней формулой последовательности является A.

При таком определении логический вывод имеет вид трехэлементной структуры $\Gamma\langle A_1, \dots, A_n\rangle A$:

1. Множество посылок (гипотез) Γ.
2. Последовательность формул $\langle A_1, \dots, A_n\rangle$.
3. Конечная формула этой последовательности A_n $(= A)$.

С нашей точки зрения, данное определение является наиболее естественным, хотя в логике существует много других методов установления отношения выводимости $\Gamma \vdash A$, понятие вывода которых структурно отличается от приведенного. Среди них можно назвать метод секвенций, методы аналитических и семантических таблиц, метод резолюций, индексный метод и др. Результат применения каждого из них допускает эффективное преобразование к стандартному виду вывода.

В связи с данным определением естественным образом возникают четыре вида задач.



1.1. Проверка корректности вывода: $\Gamma\langle A_1, \ldots, A_n\rangle A$

В этой задаче можно выделить две подзадачи. Первая подзадача — обоснование правил вывода, т. е. сохранения полезных свойств (истинности) формул от посылок правил к их заключениям, которая обычно решается семантическими средствами. Вторая — проверка корректности применения правил вывода в процессе его построения.

Если судить по определению доказательства, задача проверки корректности применения правил вывода тривиальна, но это только в теории. В реальной практике при построении математических доказательств структура рассуждений далека от логического идеала, что значительно усложняет проверку уже доказанных теорем и может служить причиной накопления незамеченных ошибок. Например, на проверку знаменитого доказательства Перельмана ушло три года. Лишь несколько человек взяли на себя ответственность за то, чтобы полностью разобраться в доказательстве и подтвердить его правильность. Остальное математическое сообщество поверило им на слово.

Известный математик Владимир Воеводский инициировал специальную исследовательскую программу *Унивалентных оснований математики* [1, 2], одной из задач которой является создание логико-математического языка для проведения сложных конструктивных доказательств, которые могли бы быть относительно легко верифицированы как людьми, так и с помощью компьютеров. В качестве языка для представления доказательств им была построена *гомотопическая теория типов*.

1.2. Поиск интересных следствий: $\Gamma\langle ...\rangle ?$

Второй тип задач — поиск интересных (полезных) следствий из данного множества предложений Γ. Мы знаем аксиомы многих математических и естественнонаучных теорий, но не догадываемся, какие новые интересные следствия они в себе скрывают. Создать методы получения таких следствий, генератор знаний, — мечта исследователей в области искусственного интеллекта. Проблема, однако, заключается в том, что множество следствий бесконечно, и потому необходимо создание специальных фильтров, отсекающих интересные следствия от неинтересных. Задача трудная, но имеющая большое теоретическое и прикладное значение.

В.А. Смирнов иллюстрировал эту задачу на примере из области органической химии [6]. Имеется теоретической описание предметной области и относящиеся к ней эмпирические данные. На основании количественного анализа вещества формируется большое, но конечное множество структурных формул. Затем производится их проверка на совместимость с теоретическими положениями и эмпирическими данными. Многие формулы отбрасываются, и остается одна или несколько формул, удовлетворяющих исходным данным.

1.3. Поиск вывода: $\Gamma\langle...?...\rangle A$

Данный вид задач в логике наиболее популярен. Именно он лежит в основе аксиоматического метода построения научных теорий. Есть множество аксиом Γ, и мы интересуемся существованием вывода из них конкретных формул.

Тот факт, что логика в значительной степени ориентирована на задачи поиска вывода, имеет историческое объяснение. Идея аксиоматического метода была высказана еще Аристотелем, полагавшим, что существует небольшое число начал, из которых путем рассуждений можно вывести все истинные суждения о явлениях окружающего мира. На рубеже XIX–XX вв. аксиоматический метод и задача поиска доказательств получили новый импульс развития. Кризис в математике потребовал сохранения максимального объема уже полученных математических результатов и подведения под них строгих оснований. Аксиоматические системы как раз и были призваны в сжатой форме сохранить центральное содержание существующих математических теорий, а строгое понятие логического вывода должно было дать корректный механизм извлечения опосредованного знания из этих аксиом. С тех пор задача поиска вывода оказалась в центре внимания логики, а гипотетико-дедуктивный метод построения научных теорий проник и закрепился в методологии науки.

Работы в этой области позволили получить много важных металогических результатов о свойствах логических систем. Однако, вопреки возлагаемым надеждам, методы поиска доказательств так и не позволили дедуцировать ни одной новой интересной теоремы. Более того, из теорем Гёделя следует, что не только практически, но и теоретически аксиоматический подход к построению научных теорий не отвечает поставленным целям. Это относится как к принципиальной неполноте достаточно богатых теорий, так и к невозможности установить их непротиворечивость. Идея Аристотеля о возможности объяснения многообразия явлений окружающего мира из небольшого числа начал оказалась принципиально неосуществимой.

1.4. Поиск гипотез: $?\langle\ldots\rangle A$

Четвертый вид задач — поиск правдоподобных гипотез, из которых следует предложение A. В современной логике решение таких задач почти не изучается, хотя они имеют более непосредственное отношение к исследовательской практике, чем задачи поиска доказательств.

В качестве одного из немногих исключений можно назвать силлогистику. В ней мы можем обнаружить энтимемы с пропущенной посылкой. Для проверки их правильности требуется найти пропущенную посылку и восстановить полный силлогизм. В результате наше знание расширяется, мы узнаем, какие дополнительные допущения мог или должен был принять человек, употребивший анализируемую энтимему.

На практике дело не сводится к одним энтимемам. Вспомним историю доказательства знаменитой теоремы Ферма. Ее решение заключалось вовсе не в дедукции из аксиом, как это можно было бы представить. Сперва в 1986 г. Кен Рибет показал, что теорема Ферма сводима к правдоподобной гипотезе Ютака Таниямы о свойствах эллиптических кривых над рациональными числами, и лишь затем в 1995 г. Эндрю Уайлс доказал саму эту гипотезу. В результате даже непонятно, кому именно принадлежит заслуга доказательства теоремы Ферма, хотя официально она приписывается Эндрю Уайлсу.

Еще один пример — знаменитые *машины Тюринга*. Они не явились результатом гениального откровения и не привиделись во сне. Алан Тюринг скрупулезно проанализировал работу абстрактного вычислителя, сформулировав правдоподобные гипотезы о его способностях и доступных ресурсах, и затем связал их простыми функциональными соотношениями. Результатом явилась аксиоматика машин Тюринга — абстрактных механических устройств, пригодных для моделирования любых эффективных вычислений. Это было достигнуто не дедукцией из несуществующих аксиом, а анализом и последующей детализацией того, что понималось под абстрактным вычислителем.

С поиском гипотез связаны задачи планирования действий. Пусть, например, требуется построить *Новый шелковый путь* (НШП) из Китая в Европу. Нет никаких аксиом, из которых можно вывести утверждение о его существовании. Необходим подробный анализ того, что понимается под НШП, разбиение уточненной задачи на подзадачи, дальнейшее разбиение этих подзадач на подподзадачи и т. д., пока не дойдем до некоторых элементарных действий, которые могут быть поручены конкретным исполнителям.

Если в задаче поиска доказательства логика выступает как *канон*, которому должно удовлетворять найденное решение, то в задаче поиска гипотез роль логики — быть *органоном* получения новых знаний. Если постараться, мы могли бы получить в свои руки не только свод требований по оформлению конечных результатов, чему служит дедуктивистский подход, но и логические методы их получения.

Привлекательным свойством данного вида задач является то, что поскольку множество гипотез Γ изначально не фиксировано, то на них не распространяются ограничения первой теоремы Гёделя о неполноте. Для каждого нового целевого утверждения A мы ищем гипотезы Γ, из которых оно могло бы следовать.

2. Попытка содержательной реконструкции

Поскольку решение задачи поиска гипотез $?\langle \ldots \rangle A$ существенным образом опирается на анализ целевого предложения A, вполне естественным было бы воспользоваться методами построения аналитических таблиц. Проблема, однако, заключается в том, что в существующем виде эти методы рассчитаны лишь на те случаи, когда анализируемые предложения являются теоремами логики, т. е. множество гипотез пусто, нас же интересует задача нахождения этого множества, когда оно не пусто, но неизвестно. Поэтому метод аналитических таблиц должен быть модифицирован. Правила редукции формул, которые используются при построении таблиц [16, 17], могут быть сохранены, так как в зависимости от логической структуры задачи они позволяют сводить ее к более простым подзадачам.

Напомним, что аналитические таблицы имеют вид дерева формул. Таблица называется замкнутой, если и только если каждая ветвь дерева содержит некоторую формулу C и ее отрицание $\neg C$. Согласно теореме о полноте, формула классической логики A доказуема, если и только если существует замкнутая аналитическая таблица для ее отрицания $\neg A$.

Если на каком-то шаге построения все возможные логические правила редукции исчерпаны, а таблица все еще не замкнута, для дальнейшего продвижения следует принять некоторую дополнительную формулу B, которая может иметь отношение к решаемой задаче и в будущем войти в искомое множество Γ. Выбор B не может быть произвольным и чем-то должен быть мотивирован. Как нам представляется, в порядке убывания приоритета, мотивом для принятия формулы B может быть отнесение ее к одному из следующих шести видов.

2.1 Формула B может быть *явным определением* одного из предикатных или функциональных символов, имеющих вхождение в полученные на данном шаге редукции предложения. Наибольший приоритет, который должен быть присвоен явным определениям, объясняется тем, что реальные задачи, как правило, формулируются в самом общем виде, и для их решения необходимо уточнить смысл используемых терминов. Если требуется решить некоторую задачу, мы можем разбить ее на несколько подзадач, приняв соответствующее определение.

При этом ни одно уточнение посредством определений не обязательно должно быть окончательным. В дальнейшем может оказаться необходимым продолжить уточнение терминов, которые фигурируют в дефиниенсе.

Т. е. процесс редукции посредством определений в общем случае является многоступенчатым.

Например, если поставлена задача доказать гипотезу Гольдбаха, необходимо ответить на вопрос: что это такое? На естественном языке она формулируется следующим образом: *«Каждое чётное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел»*. Строгое определение будет иметь вид:

$$GB \equiv \forall x(x\rangle 2 \ \&\ Even(x) \supset \exists y \exists z(Prime(y) \& Prime(z) \& x = y + z))$$

Новые нелогические символы, которые появились в дефиниенсе, также должны быть определены:

$$\forall x(Even(x) \equiv \exists y(y\rangle 0 \ \&\ x = y + y))$$
$$\forall x(Prime(x) \equiv x\rangle 1 \ \&\ \forall y \forall z(x = y \times z \supset y = 1 \vee z = 1))$$

и т. д.

2.2 Формула B может быть *неявным аксиоматическим определением* одного из предикатных или функциональных символов, имеющих вхождение в полученные на данном шаге редукции предложения. Аксиоматические определения представляют удобный способ задания рекурсивных и индуктивных функций и предикатов. Как и в случае явных определений, данный процесс может быть многоступенчатым. Например, это может быть связано с введением терминов, задаваемых нефундаментальными и фундаментальными индуктивными определениями.

В примере с гипотезой Гольдбаха нам понадобится добавить неявные аксиоматические определения для символов: 0, $+$, $\times$.

2.3 B может быть *ранее доказанной теоремой*. Если взять арифметику или геометрию, то в них на настоящий момент доказано очень много теорем, и мы не можем перебирать их все, чтобы испытать в качестве посылок. Лишь путем анализа целевого предложения можно выбрать те ранее доказанные теоремы, которые действительно могут помочь решению задачи.

В примере с гипотезой Гольдбаха, определив все символы, которые входят в ее формулировку, мы практически нисколько не продвинулись в ее решении. Здесь и могут оказаться полезными ранее доказанные теоремы, например о распределениях простых чисел.

2.4 B может быть *эмпирически истинным высказыванием*, имеющим отношение к данной задаче: «Волга впадает в Каспийское море» или «Золото имеет желтый цвет». При решении задач планирования действий это может быть фактическая информация, хранящаяся в базах данных.

2.5 B может быть *описанием результата некоторого действия*, имеющего отношение к данной задаче. Например, в случае решения геометрических задач это может быть описанием результата вспомогательного геометрического построения. В случае естественных наук это может потребовать проведения того или иного эксперимента и фиксации в B его результата. Описание результата некоторого действия может понадобиться и в случае решения задач планирования действий.

2.6 B может быть любой *правдоподобной гипотезой*, которая способна помочь решению задачи. Данный пункт имеет наименьший приоритет, что вовсе не тождественно его значимости. Принятие правдоподобных гипотез напрямую связано с расширением нашего знания и потому должно применяться с большой осторожностью. Например, в камере Вильсона обнаружен след, траекторию которого невозможно объяснить никакими известными элементарными частицами. Это дает основание для принятия гипотезы о существовании новой частицы. Конкретные формулировки гипотез могут обосновываться индуктивными соображениями, умозаключениями по аналогии и др.

В математике правдоподобная гипотеза может иметь вид обобщения исходного утверждения, которое также требует последующего обоснования.

3. Формализация метода

Формализация будет произведена в виде аналитических таблиц в стиле Фиттинга [16, 17], которые лучше всего приспособлены для представления процесса редукции формул. Основная цель — определить общий вид структуры аналитических рассуждений и необходимых условий, которым она должна удовлетворять.

Исходные символы языка

1. $x, y, z, \ldots$ — счетное множество индивидных переменных;
2. $a, b, c, \ldots$ — счетное множество индивидных констант;
3. $f^n, g^n, h^n, \ldots$ — счетное множество n-местных функциональных символов для каждого $n < 0$;
4. $P^n, Q^n, R^n, \ldots$ — счетное множество n-местных предикатных символов для каждого $n \geq 0$;
5. $=$ — двухместный предикат равенства;
6. $\neg, \&, \vee, \supset$ — логические связки;
7. $\forall, \exists$ — кванторы.

Термы

1. Всякая индивидная переменная есть терм;
2. Всякая индивидная константа есть терм;
3. Если $t_1, \ldots, t_n$ — термы, а f^n — n-местный функциональный символ, то $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ — терм;
4. Ничто другое термом не является.

Формулы

1. Если $t_1, \ldots, t_n$ — термы, а P^n — n-местный предикатный символ, то $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ — формула.
2. Если t_1 и t_2 — термы, то $t_1 = t_2$ — формула.
3. Если A и B – формулы, то $\neg A$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ — формулы.
4. Если A — формула, а x — индивидная переменная, то $\forall x A$, $\exists x A$ — формулы.
5. Ничто другое формулой не является.

Соглашения об обозначениях

1. Мы будем опускать указание на местность функциональных и предикатных символов, если она ясна из контекста.
2. $A \equiv B$ будет служить сокращением для формулы $((A \supset B) \& (B \supset A))$.
3. Если S — множество формул, возможно, пустое, а A — формула, то в качестве сокращения для $S \cup A$ будем использовать запись $\{S, A\}$ или S, A.
4. $A[P^n]$ служит обозначением формулы A, в которую имеет вхождения n-местный предикатный символ P^n.
5. $A[f^n]$ служит обозначением формулы A, в которую имеет вхождения n-местный функциональный символ f^n.
6. $A[t]$ служит обозначением для формулы A с выделенным вхождением терма t.

7. $A[u/t]$ служит обозначением для результата подстановки в формулу A терма u вместо выделенного вхождения терма t.

8. $A(t/x)$ служит обозначением для результата подстановки в формулу A терма t вместо всех свободных вхождений переменной x.

9. $FV(A)$ — множество свободных индивидных переменных формулы A.

10. $FV(t)$ — множество индивидных переменных терма t.

11. Замкнутой формулой или термом будем называть формулу или терм, не имеющие свободных вхождений переменных.

Локальные правила редукции

$$(\neg\neg)\ \frac{S, \neg\neg A}{S, A}$$

$$(\&)\ \frac{S, (A \& B)}{S, A, B} \qquad (\neg\&)\ \frac{S, \neg(A \& B)}{S, \neg A \mid S, \neg B}$$

$$(\vee)\ \frac{S, (A \vee B)}{S, A \mid S, B} \qquad (\neg\vee)\ \frac{S, \neg(A \vee B)}{S, \neg A, \neg B}$$

$$(\supset)\ \frac{S, (A \supset B)}{S, \neg A \mid S, B} \qquad (\neg \supset)\ \frac{S, \neg(A \supset B)}{S, A, \neg B}$$

$$(\forall)\ \frac{S, \forall x A}{S, \forall x A, A(t/x)} \qquad (\neg\forall)\ \frac{S, \neg\forall x A}{S, \neg A(a/x)} \quad a \text{ – новая константа}$$

$$(\exists)\ \frac{S, \exists x A}{S, A(a/x)} \quad a \text{ – новая константа} \qquad (\neg\exists)\ \frac{S, \neg\exists x A}{S, \neg\exists x A, \neg A(t/x)}$$

$$(=)\ \frac{S}{S, t = t} \qquad (= /)\ \frac{S, A[t], t = u}{S, A[t], A[u/t], t = u}$$

Ограничения на применение локальных правил редукции

1. В правилах $(\forall)$ и $(\neg\exists)$ терм t является произвольным замкнутым термом языка.

2. В правилах $(=)$ и $(=/)$ термы t и u — замкнутые.

Глобальные правила редукции

$$(P)\ \frac{A[P^n]}{B[P^n]} \qquad (f)\ \frac{A[f^n]}{B[f^n]}$$

$$(DP)\ \frac{A[P^n]}{\forall x_1..\forall x_n(P^n(x_1,\ldots,x_n) \equiv B)} \quad FV(B) \subseteq \{x_1,..,x_n\}$$

$$(Df)\ \frac{A[f^n]}{\forall x_1..\forall x_n(f^n(x_1,\ldots,x_n) = u)} \quad FV(u) \subseteq \{x_1,..,x_n\}$$

Ограничения на применение глобальных правил редукции

1. В правилах $(P),(f),(DP)$ и (Df) формула под чертой не должна содержать индивидных констант, введенных ранее локальными правилами редукции $(\exists)$ или $(\neg\forall)$.

2. В правиле (DP) формула B не содержит вхождений предикатного символа P^n, а в правиле (Df) терм u не содержит вхождений функционального символа f^n.

Очевидно, что правила (DP) и (Df) являются частными случаями правил (P) и (f). Тем не менее имеет смысл дать им отдельные формулировки, поскольку они несут специальную смысловую нагрузку принятия определений для предикатных и функциональных символов.

В правилах (P) и (f) требование, чтобы один и тот же дескриптивный символ имел вхождения в формулу над чертой и под чертой, служит тому, чтобы новая добавляемая формула имела отношение к решаемой задаче.

Понятие доказательства

Пусть U — некоторое множество замкнутых формул.

Результатом применения к множеству U правила $R \in \{(\neg\neg),(\&),(\neg\vee),(\neg\supset),(\forall),(\neg\forall),(\exists),(\neg\exists),(=),(=/)\}$ будем называть замену его на множество формул U_1, если U совпадает с множеством формул над чертой данного правила, а U_1 совпадает с множеством формул под чертой.

Результатом применения к множеству U правила $R \in \{(\neg\&), (\vee), (\supset)\}$ будем называть его замену парой множеств U_1 и U_2, если U совпадает с множеством формул над чертой данного правила, а U_1 и U_2 совпадают с двумя множествами формул под чертой.

Конфигурацией будем называть семейство множеств формул $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$.

Результатом применения к конфигурации $\{U_1, \ldots, U_n\}$ локального правила редукции R будем называть замену данной конфигурации на новую, отличающуюся от исходной лишь тем, что вместо одного из множеств U_i она содержит результат применения к нему правила R.

Если хотя бы одно из множеств формул конфигурации $\{U_1, \ldots, U_n\}$ содержит формулу над чертой глобального правила редукции $R \in \{(P), (f), (DP), (Df)\}$, то *результатом применения к конфигурации $\{U_1, \ldots, U_n\}$ данного правила R* будет новая конфигурация $\{U'_1, \ldots, U'_n\}$, в которой каждое множество U'_i получено из U_i путем добавления к нему формулы под чертой правила R. Т. е. глобальные правила редукции изменяют все множества формул данной конфигурации.

Таблицей будем называть конечную последовательность конфигураций $\langle C_1, .., C_n\rangle$, в которой каждая конфигурация, кроме первой, получена из предшествующей конфигурации в результате применения локального или дефинициального правила редукции.

Множество формул U замкнуто, если оно содержат некоторую формулу A и ее отрицание $\neg A$.

Конфигурация $\{U_1, \ldots, U_n\}$ замкнута, если замкнуто каждое множество U_i.

Таблица $\langle C_1, .., C_n\rangle$ замкнута, если замкнута одна из ее конфигураций C_i.

Доказательством для замкнутой формулы A будем называть замкнутую таблицу $\langle C_1, .., C_n\rangle$ с начальной конфигурацией $C_1 = \{\{\neg A\}\}$. Очевидно, что если формула A имеет вид импликации $(B_1 \supset \ldots (B_n \supset D))$, то для ее доказательства в качестве начальной конфигурации достаточно взять $C_1 = \{\{B_1, \ldots, B_n, \neg D\}\}$.

Будем говорить, что *формула A доказана относительно множества гипотез Hyp*, если существует замкнутая таблица $\langle C_1, .., C_n\rangle$ с начальной конфигурацией $C_1 = \{\{\neg A\}\}$, и Hyp состоит из всех формул, добавленных при построении данной таблицы применением правил $(P), (f), (DP)$ и (Df).

Будем говорить, что *для множества формул S существует замкнутая таблица относительно множества гипотез Hyp*, если существует замкнутая таблица $\langle C_1, .., C_n\rangle$ с начальной конфигурацией $C_1 = \{S\}$, и Hyp состоит из всех формул, добавленных при построении данной таблицы применением правил $(P), (f), (DP)$ и (Df).

4. Свойства построенного исчисления

Первая теорема говорит о том, что посредством глобальных правил редукции формируется множество гипотез, достаточных для построения из них логического вывода целевого предложения, т.е. решения четвертого типа задач.

Теорема 1. *(Об элиминации глобальных правил редукции) Если существует замкнутая таблица для множества формул S относительно множества гипотез $Hyp = \{B_1, \ldots, B_m\}$, где $m \geq 0$, то существует замкнутая таблица для множества формул $S \cup Hyp$ без применения глобальных правил редукции.*

Доказательство.

Доказываем индукцией по числу применений глобальных правил редукции $m \geq 0$.

Базис индукции для $m = 0$ имеет место тривиальным образом.

Индукционный шаг для $m > 0$ в предположении, что для $m-1$ утверждение теоремы имеет место.

Пусть $\langle C_1, \ldots, C_i, C_{i+1}, \ldots, C_n\rangle$ — замкнутая таблица для множества формул S с m применениями глобальных правил редукции, в котором конфигурация C_{i+1} получена из конфигурации C_i в результате первого применения одного из этих правил. Это означает, что если $C_i = \{U_{i,1}, \ldots, U_{i,k}\}$, то конфигурация $C_{i+1} = \{U_{i,1} \cup \{B\}, \ldots, U_{i,k} \cup \{B\}\}$ для некоторой формулы B, добавленной применением данного глобального правила.

Преобразуем таблицу следующим образом. Заменим каждую конфигурацию $C_j = \{U_{j,1}, \ldots, U_{j,r}\}$, где $j \leq i$, на $C'_j = \{U_{j,1} \cup \{B\}, \ldots, U_{j,r} \cup \{B\}\}$. В результате получим:

1. Начальная конфигурация $C_1 = \{S\}$ преобразуется в $C'_1 = \{S \cup \{B\}\}$.

2. Каждая конфигурация C'_j, где $1 < j \leq i$, получена из конфигурации C'_{j-1} по тому же правилу локальной редукции, которое было применено при переходе от C_{j-1} к C_j. Это так, поскольку добавление еще одной формулы к посылкам локальных правил редукции не мешает их применению. Сложности могут возникнуть лишь с применением

правил ($\exists$) и ($\neg\forall$), но они преодолеваются в силу ограничения, что формула B не содержит индивидных констант, введенных ранее этими правилами.

3. Конфигурация C'_i совпадает с конфигурацией C'_{i+1}.

В силу пункта 3 конфигурация C'_{i+1} может быть исключена, и доказательство с $m-1$ применением глобальных правил будет иметь вид $\langle C'_1, \ldots, C'_i, C_{i+2} \ldots, C_n \rangle$.

$\square$

Вторая теорема позволяет элиминировать все явные определения, которые были приняты в ходе построения доказательства.

Теорема 2. *(Об элиминации явных определений) Если доказуема формула $(D_1\&...\&D_k \supset A)$, где D_i имеет вид определения $\forall x_1..\forall x_n(P_i(x_1,\ldots,x_n) \equiv B_i)$ или $\forall x_1..\forall x_n(f_i(x_1,\ldots,x_n) = u_i)$, то доказуема формула A^*, полученная из формулы A путем раскрытия всех принятых определений.*

Доказательство.

Возьмем формулу $(D_1\&..\&D_k \supset A)$ и, опираясь на теорему *352n из [12, с. 183–184], в зависимости от вида D_i последовательно произведем в нее подстановки для всех i от 1 до k.

$S_{Bi}^{Pi(x1,..,xr)}(D'_1\&..\&D'_k \supset A')$

или

$S_{ui}^{fi(x1,..,xr)}(D'_1\&..\&D'_k \supset A')$

После выполнения всех подстановок мы получим формулу $(D^*_1\&..\&D^*_k \supset A^*)$, где каждая из формул $D*_i$ будет иметь вид $\forall x_1..\forall x_r(B^*_i \equiv B^*_i)$ или $\forall x_1..\forall x_r(u^*_i = u^*_i)$, и тем самым $D^*_1\&..\&D^*_k$ будет теоремой логики предикатов.

Из $\vdash (D^*_1\&..\&D^*_k \supset A^*)$ и $\vdash D^*_1\&..\&D^*_k$ по *modus ponens* получаем $\vdash A^*$.

$\square$

5. Заключение

В статье [7] была предложена формализация аналитического подхода к решению задач, основанная на поиске модели для целевого предложения. Поскольку проблема выполнимости формул логики предикатов первого порядка не является частично разрешимой, было принято решение ограничиться лишь конечными моделями. Такое ограничение вполне допустимо для многих практических задач. Одновременно с ограничением конечными предметными областями был выбран язык, не содержащий предиката равенства и функциональных символов. Это было связано с вопросами удобства применения правил аналитической редукции. Редукция целевого предложения имела вид дерева, и задача считалась завершенной, если хотя бы одна из ветвей удовлетворяла условиям замыкания, которые позволяли построить выполняющую модель целевого предложения.

В настоящей работе мы рассматриваем любые задачи, которые допускают формулировку в языке логики предикатов первого порядка, не налагая никаких дополнительных ограничений ни на модели, ни на язык. Решение задачи извлекается из доказательства того, что аналитическая таблица для отрицания целевого предложения замыкается при условии принятия ряда дополнительных гипотез. Это близко к построению обычных аналитических таблиц, но основное отличие заключается в применении глобальных правил редукции. Как и в случае обычных аналитических таблиц, таблица считается замкнутой, если замкнуты все ее ветви (замкнута одна из конфигураций). Тогда каждая модель для множества формул, добавленных в результате применения глобальных правил, будет моделью целевого предложения. Таким образом, мы получаем адекватную формализацию для решения четвертого типа задач, связанных с понятием вывода.

В отношении современной логики, делающей упор на дедукцию, можно высказать замечание, что она исправно играет роль *канона* — в каком виде следует представлять накопленные нами знания и каким требованиям должны удовлетворять строгие рассуждения, но лишена инструментальных функций *органона* — не является логикой открытия. Попытки наделить ее этими функциями предпринимались на пути развития методов правдоподобных рассуждений, но впечатляющих результатов достигнуто не было. Это девальвирует ценность логики как инструмента в руках исследователей, и потому не стоит удивляться, что общий курс логики для студентов мехмата МГУ занимает всего один семестр, а на других ведущих естественнонаучных факультетах логику вообще не изучают.

Аналитический подход не является альтернативой аксиоматико-дедуктивному. Каждый из них решает свои задачи. Аксиоматико-дедуктивный подход нацелен на задачи представления знаний, когда они уже получены и остается лишь представить их в удобном для дальнейшего использования виде. Аналитический подход нацелен на получение новых знаний в процессе решения тех или иных задач. Методы дедукции играют в нем вспомогательную роль, когда на завершающем этапе требуется показать, что найденное решение задачи действительно является таковым. До этого момента методы редукции и принятия новых допущений направляют исследователя в поиске гипотез для последующей дедукции целевого предложения. Поскольку множество гипотез Γ изначально не фиксировано, на аналитический подход не распространяются ограничения первой теоремы Гёделя о неполноте. Для любого истинного, но недоказуемого из имеющегося набора аксиом предложения, мы можем попытаться найти дополнительные постулаты, которые требуются для его доказательства. В этом смысле при аналитическом подходе логика рассматривается как открытая система.

Современная логика не успевает за тем, что на простом содержательном уровне преподается уже в школах [5], когда учат двум методам решения задач — *синтетическому* и *аналитическому*. Синтетический метод выглядит следующим образом:

> *Как ученики обычно решают сложную задачу? Они берут любое данное из условия задачи и к нему присоединяют какое-либо из остальных данных. Если эти данные образуют простую задачу, то ее решают; если простой задачи не получилось, образуют другую пару данных и в результате решения первой простой задачи получают первое вспомогательное данное. Используя вспомогательное данное и какое-либо из остальных данных основной задачи, решают вторую простую задачу и получают второе вспомогательное данное и т. д. до тех пор, пока не получат такой простой задачи, результат которой является искомым основной задачи. Это и есть синтетический метод решения задач* [5, с. 180].

> *Достоинством синтетического метода является компактность, достигаемая при изложении готовых решений, полученных в процессе синтетического или аналитического поиска. Несмотря на низкую поисковую и дидактическую эффективность синтетического метода, он пользуется популярностью у школьников и даже учителей, поскольку весьма прост и не требует большого мыслительного напряжения* [5, с. 184].

В приведенной цитате легко распознать задачу поиска вывода от посылок к заключению. Аналитический метод описывается иначе:

> *При аналитическом методе решения отправляются не от условия задачи, как это делают при синтетическом методе, а от ее требования, вопроса. Это характерно для всех разновидностей аналитического метода, применяемых при решении задач. <...> Решение задач аналитическим методом начинается с постановки вопроса, связанного с требованием решаемой задачи: "Что нужно знать, чтобы ответить на вопрос данной задачи (выполнить ее требование)?"* [5, с. 185].

Далее автор учебного пособия рассматривает конкретные примеры, которые в нашей терминологии соответствуют поиску гипотез, достаточных для решения задачи.

В заключение хотелось бы сказать, что пришло время наряду с теорией поиска доказательств дополнить стандартные курсы преподавания логики еще одной темой — теорией аналитического решения задач. Настоящую работу можно рассматривать как один из шагов построения такой теории.

Литература

[1] Интервью Владимира Воеводского (часть 1). URL: https://sspr.livejournal.com/620950.html (дата обращения: 24.02.2018).

[2] Интервью Владимира Воеводского (часть 2). URL: http://baaltii1.livejournal.com/200269.html (дата обращения: 24.02.2018).

[3] *Марков А.А.* Элементы математической логики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 80 с.

[4] *Метельский Н.В.* Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы: Учеб. пособие для вузов. Минск: Изд-во БГУ, 1982. 256 с.

[5] *Смирнов В.А.* Творчество, открытие и логические методы поиска доказательства // Логико-философские труды В.А. Смирнова. М.: Эдиториал УРСС, 2001. С. 438–447.

[6] *Чёрч А.* Введение в математическую логику. М.: ИЛ, 1960. 486 с.

[7] *Шалак В.И.* Дедуктивно-аналитический подход к планированию целей // Логико-философские штудии. 2016. Т. 13. № 2. С. 134–135. URL: http://ojs.philosophy.spbu.ru/index.php/lphs/article/view/418/423 (дата обращения: 24.02.2018).

[8] *Шалак В.И.* Аналитический подход к решению задач // Логические исследования. 2017. № 23(1). С. 121–139. URL: https://iphras.ru/uplfile/logic/log23_1/121 (дата обращения: 24.02.2018).

[9] *Шалак В.И.* Виды дедуктивных задач и их решение // 10-е Смирновские чтения по логике: Материалы международной научной конференции. М., 2017. С. 121–123.

[10] *Cellucci C.* Why Proof? What is a Proof? // Deduction, Computation, Experiment. Exploring the Effectiveness of Proof. Berlin: Springer-Verlag, 2008. P. 1-27. URL: https://www.academia.edu/184307/Why_Proof_What_is_a_Proof (дата обращения: 24.02.2018).

[11] *Cellucci C.* Rethinking Logic. Logic in Relation to Mathematics, Evolution, and Method. Berlin: Springer, 2013. 390 p.

[12] *Cellucci C.* Does logic slowly pass away, or has it a future? URL: https://www.academia.edu/4433563/Does_Logic_Slowly_Pass_Away_or_Has_It_a_Future (дата обращения: 24.02.2018).

[13] *Cellucci C.* Is Mathematics Problem Solving or Theorem Proving? URL: https://www.academia.edu/16448950/Is_Mathematics_Problem_Solving_or_Theorem_Proving (дата обращения: 24.02.2018).

[14] *Cellucci C.* Philosophy of Mathematics: Making a Fresh Start // Studies in History and Philosophy of Science. 2013. Vol. 44. P. 32–42. URL: https://www.academia.edu/3153062/Philosophy_of_Mathematics_Making_a_Fresh_Start (дата обращения: 24.02.2018).

[15] *Cellucci C.* Why Should the Logic of Discovery Be Revived? A Reappraisal. URL: https://www.academia.edu/7077297/Why_Should_the_Logic_of_Discovery_Be_Revived_A_Reappraisal (дата обращения: 24.02.2018).

[16] *Fitting M.C.* First-Order Logic and Automated Theorem Proving. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 242 p. (дата обращения: 24.02.2018).

[17] *Fitting M.* Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. 192 p.

Vladimir I. Shalack

Analysis vs Deduction

Shalack Vladimir Ivanovich
Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: shalack@gmail.com

In the paper, we consider four types of problems that naturally arise in connection with the definition of a logical inference: 1) verifying the proof of: $\Gamma\langle A_1, ..., A_n\rangle A$; 2) search for interesting consequences: $\Gamma\langle ...\rangle ?$; 3) search for the proof: $\Gamma\langle .?.\rangle A$; 4) search for hypotheses: $?\langle ...\rangle A$. Modern logic focuses on the problem of finding the proof of statements. Gödel's restrictive theorems have a direct relation to it. At the same time in real practice, the task of search for hypotheses is much more common. The main part of this work is devoted to the investigation of this problem. A target proposition A is given, and it is required to find the set of premises Γ from which it is logically deducible. The choice of suitable premises Γ occurs on the basis of the logical analysis of proposition A. We distinguish six different grounds for the selection of these premises: 1) acceptance of explicit definitions for predicate and functional symbols; 2) acceptance of axiomatic definitions for predicate and functional symbols; 3) acceptance of previously proved theorems; 4) acceptance of empirically true statements; 5) acceptance of statements describing the result of some action; 6) acceptance of plausible hypotheses that may be relevant to the problem being solved. In this paper we construct a calculus that formalizes the problem of an analytic search for the justification of a thesis. Two metatheoremes are proved, from which it follows that the constructed calculus really allows us to solve this type of problems.

Keywords: Problem solving, logical reduction, logical inference, search for proof, search for hypotheses, analytical tables, theory of definitions

References

[1] *Interv'yu Vladimira Voevodskogo (chast' 1)* [Interview with Vladimir Voevodsky (part 1)] [https://sspr.livejournal.com/620950.html, accessed on 24.02.2018]. (In Russian)

[2] *Interv'yu Vladimira Voevodskogo (chast' 2)* [Interview with Vladimir Voevodsky (part 2)] [http://baaltii1.livejournal.com/200269.html, accessed on 24.02.2018]. (In Russian)

[3] Markov, A.A. *Elementy matematicheskoi logiki* [Elements of mathematical logic]. M.: Izd-vo Mosk. Un-ta, 1984. 80 pp. (In Russian)

[4] Metel'skij, N.V. *Didaktika matematiki: Obshchaya metodika i ee problemy: Ucheb. poosobie dlya vuzov* [Didactics of mathematics: General methodology and its problems: Proc. manual for universities]. Minsk: Izd-vo BGU, 1982. 256 pp. (In Russian)

[5] Smirnov, V.A. "Tvorchestvo, otkrytie i logicheskie metody poiska dokazatel'stva" [Creativity, discovery and logical methods of finding evidence], in: *Logiko-filosofskie trudy V.A. Smirnova* [Logical and philosophical works of VA. Smirnova]. M.: Editorial URSS, 2001, pp. 438–447. (In Russian)

[6] Church, A. *Vvedenie v matematicheskuyu logiku* [Introduction to mathematical logic]. M.: IL, 1960. 486 pp. (In Russian)

[7] Shalack, V.I. "Deduktivno-analiticheskii podkhod k planirovaniyu tselei" [Deductive-analytical approach to planning goals], *Logiko-filosofskie shtudii* [Logical and philosophical studies], 2016, Vol. 13, No. 2, pp. 134–135. [http://ojs.philosophy.spbu.ru/index.php/lphs/article/view/418/423, accessed on 24.02.2018]. (In Russian)

[8] *Shalack V.I.* "Analiticheskii podkhod k resheniyu zadach" [Analytical approach to solving problems], *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations], 2017, No. 23(1), pp. 121–139. [https://iphras.ru/uplfile/logic/log23_1/121, accessed on 24.02.2018]. (In Russian)

[9] Shalack, V.I. "Vidy deduktivnykh zadach i ikh reshenie" [Types of deductive problems and their solution], in: *Desyatye Smirnovskie chteniya po logike.* Materialy mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii [Tenth Smirnov's readings on logic. Proceedings of the International Scientific Conference], M., 2017, pp. 121–123. (In Russian)

[10] Cellucci, C. "Why Proof? What is a Proof?", in: *Deduction, Computation, Experiment. Exploring the Effectiveness of Proof.* Berlin: Springer-Verlag, 2008, pp. 1–27. [https://www.academia.edu/184307/Why_Proof_What_is_a_Proof, accessed on 24.02.2018].

[11] Cellucci, C. *Rethinking Logic. Logic in Relation to Mathematics, Evolution, and Method.* Berlin: Springer, 2013. 390 pp.

[12] Cellucci, C. *Does logic slowly pass away, or has it a future?* [https://www.academia.edu/4433563/Does_Logic_Slowly_Pass_Away_or_Has_It_a_Future, accessed on 24.02.2018].

[13] Cellucci, C. *Is Mathematics Problem Solving or Theorem Proving?* [https://www.academia.edu/16448950/Is_Mathematics_Problem_Solving_or_Theorem_Proving, accessed on 24.02.2018].

[14] Cellucci, C. "Philosophy of Mathematics: Making a Fresh Start", *Studies in History and Philosophy of Science*, 2013, Vol. 44, pp. 32–42. [https://www.academia.edu/3153062/Philosophy_of_Mathematics_Making_a_Fresh_Start, accessed on 24.02.2018].

[15] Cellucci, C. *Why Should the Logic of Discovery Be Revived? A Reappraisal.* [https://www.academia.edu/7077297/Why_Should_the_Logic_of_Discovery_Be_Revived_A_Reappraisal, accessed on 24.02.2018].

[16] Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Berlin: Springer-Verlag, 1990. 242 pp.

[17] Fitting, M. *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. 192 pp.