Российская Академия Наук
Институт философии

М.М. Новосёлов

БЕСЕДЫ О ЛОГИКЕ

Москва
2006

УДК 160.1
ББК 87.5
Н 76

В авторской редакции

Рецензенты
доктор филос. наук *А.М. Анисов*
доктор филос. наук *В.А. Бажанов*

Н 76 **Новосёлов М.М.** Беседы о логике. — М., 2006. — 158 с.

Указанная монография, не углубляясь в технические детали современной логики, освещает некоторые её проблемы с их идейной стороны. При этом речь идёт как о понятиях, участвующих в формировании логической теории в целом (исторический аспект развития логики и её связь с теорией аргументации), так и о понятиях частного порядка (например, идейный аспект теории «нормальных форм»). Вместе с тем главная цель автора — обсудить справедливость (достаточность) традиционного определения логической дедукции как движения мысли «от общего к частному», по крайней мере, в той части логики, которую называют «логикой высказываний». В этой связи автор показывает, что дедукция, равным образом, как и эксперимент, демонстрирует характерные черты *верификации,* что вполне объясняет, почему именно Декарт поставил дедукцию на второе место (в порядке исследования) после интеллектуальной интуиции.

ISBN 5-9540-0060-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уже по одному своему названию книга «Беседы о логике» не может восприниматься как учебник. И всё же, я надеюсь, она не лишена учебной (разъяснительной) цели, ради которой вообще ведутся беседы или читаются лекции. Она и на самом деле задумывалась как дополнение к гуманитарным учебным курсам по логике.

Что же касается термина «Беседы», то его не стоит понимать буквально. Ведь в книге нет собеседников и нет беседы как таковой. Это не записи бесед с другими, но размышления; своего рода «заметки на полях» чужих текстов. Термин «Беседы» выбран мной скорее для иносказания, для выражения того, что лично для меня в нём содержится намёк на беседы возможные или скрытые, те, во-первых, что были с самим собой, когда я учился логике, и те, во-вторых, что мысленно велись с теми, кто учил меня логике.

А учили меня люди разные, по разному относившиеся к логике и по разному толковавшие логику. Помнится, у букинистов в Художественном проезде мой сокурсник и я купили по случаю (каждый) книгу Гильберта и Аккермана «Основы теоретической логики». Книжка была новенькая, проданная «не с рук». Просто лет десять она провела «в заточении» на каком-то книжном складе, поскольку с момента выхода в свет в 1947 г. она считалась персоной *non grata*. Для меня тогда эта книга показалась откровением. Но когда я принёс её на очередной семинар по логике, преподаватель укоризненно заметил: «Зачем вы это купили, ведь это же не логика». Фраза врезалась в память и помнится спустя сорок лет, ведь она сказана была на кафедре логики Московского Государственного университета!

Впрочем, удивляться, пожалуй, не стоит. Это был, кажется, 1958 г. – время переломное в университетской судьбе формальной логики, время, которое недавно во многих подробностях описал Борис Владимирович Бирюков[1] .

Политическая оттепель 1958 г. сказалась и на судьбе университетской логики. Лучшие её преподаватели нас разбудили от силлогистической спячки. В первую очередь, это Евгений Казимирович Войшвилло. Сначала своим общим курсом лекций по логике высказываний и предикатов (по мотивам книги С.К.Клини), а затем спецкурсом по алгебре логики в синтезе автоматических устройств (1959–1960). Затем нам (студентам отделения логики) посчастли-

[1] *Бирюков Б.В.* Борьба вокруг логики в Московском Государственном университете в первое послесталинское десятилетие (1954–1965) // Логика и В.Е.К. М., 2003.

вилось прослушать два спецкурса Александра Владимировича Кузнецова: «Алгоритмы и массовые проблемы» и «Проблемы разрешения» (1961–1962 учебный год).

И это всё из области официального. А наряду (неофициально с «бегством» на мехмат) были лекции и семинар Софьи Александровны Яновской (по гильбертовской теории ε-символа, по комбинаторной логике Карри, по теории предикатов по Лоренцену и др.); наконец, лекции Николая Макарьевича Нагорного по теории нормальных алгорифмов (1961–1962).

Я говорю это, конечно, не для истории. Просто я хочу принести глубокую благодарность всем людям, которые учили меня современной логике, хотя я был, кажется, не слишком уж способный их ученик.

И отдельная благодарность тем, с кем меня свела судьба в работе над первой отечественной Философской энциклопедией (1963–1970). Это Борис Владимирович Бирюков – первый строгий мой экзаменатор, и Юрий Алексеевич Гастев, с которым мне особенно легко было работать, во-первых, потому, что он никогда не подчёркивал своего превосходства в тех сферах логики, которые мне были тогда недоступны, а, во-вторых, потому, что он был настоящим товарищем по редакционной работе, понимающим тяжёлую долю редактора.

Беседа первая. По заветам Сократа

Le maitre de philosophie. – Par où vous plaît-il que nous commencions? Voulez-vous que je vous apprenne la logique?
M. Jourdain. – Qu'est-ce que cette logique?
Molière

1.1. Введение

Главный завет Сократа – самопознание. Именно так и шёл человек, создавая логику.

Определение какой-либо науки, предложенное в самом начале разговора о ней, всегда рискует оказаться либо непонятным, либо, в исторической перспективе, неполным. Неполнота очевидна, поскольку любая наука постоянно реформируется путём преобразований, как её целей, так её методов и теорий. А новые формы развития науки конституируются не сразу. Наконец, попытка с самого начала дать ясное представление о какой-либо науке тому, кто только приступает к её изучению, рискует оказаться и потому напрасной, что истинный способ понять, что представляет собой данная наука, – это поработать в ней.

Поэтому неудивительно, если определение логики, которое последовало за приведённым в эпиграфе вопросом, показалось господину Журдэну крайне непонятным, хотя к чести автора знаменитой комедии он вложил в уста учителя философии вполне корректную, по тем временам, характеристику этой науки.

А это было время, когда логика сделалась настоящей *idée fixe* французского учёного общества благодаря замечательной (по словам Лейбница) «*Logique ou l'art de penser*», первое издание которой появилось за восемь лет до постановки комедии Мольера[2].

[2] Подробно познакомится с этой книгой можно по её (первому) русскому переводу: *А.Арно, П.Николь* «Логика или искусство мыслить». М., 1991. А прочитать о ней и её влиянии на последующее развитие логики можно в послесловии редактора перевода (подробно) или (коротко) в ст.: «Логика Пор-Рояля» (Новая философская энциклопедия. М., 2001).

Итак, мы не последуем методу определений и удовлетворимся пока лишь предварительным рассказом об истории необходимых нам первых логических терминов, памятуя, однако, что история, как говорил Гегель, тем ближе к истине, чем более она придерживается данного в настоящем. А это означает, что, говоря о событиях давно прошедших времён, нам следует иметь в виду и положение дел в современной нам науке. Разумеется, исторические факты от этого не меняются. Просто мы по-другому смотрим на них.

Естественно, что, отправляясь в историю, мы можем выбирать точку отсчёта в известном смысле произвольно, в зависимости от той задачи, которую себе ставим. В нашем случае задача чисто учебная – наметить некоторые «верстовые столбы» на пути к современному значению термина «логика».

1.2. В круге первом. История

Первые учения о формах и способах рассуждений возникли в странах Древнего Востока (Китай, Индия), но в основе современной логики лежат учения, созданные в IV в. до н.э. древнегреческими мыслителями мегарской школы и Аристотелем. Последнему принадлежит исторически первое отделение атрибутивной формы высказывания (как утверждения или отрицания «чего-то о чём-то») от его содержания. Аристотель определил простое высказывание (суждение) как атрибутивное отношение двух терминов, описал основные виды атрибутивных суждений и правильных способов их обращения, ввёл понятия о доказывающих силлогизмах как общезначимых формах связи атрибутивных суждений, о фигурах силлогизмов и их модусах, а также изучил условия построения силлогистических законов (доказывающих силлогизмов).

Аристотель создал законченную теорию дедукции – *силлогистику*, реализующую в рамках полуформальных представлений идею выведения логических следствий при помощи механических приёмов, родственных *алгоритмам*. Он дал первую классификацию логических ошибок, первую модель атрибутивных отношений, указав на изоморфизм этих и объёмных отношений, и заложил основы учения о логическом доказательстве (логическом смысле истинности). Ученики Аристотеля (Теофраст и Евдем) продолжили его теорию применительно к условным и разделительным силлогизмам.

Однако уже сам Аристотель сознавал, что в силлогистические схемы нельзя уложить многие рассуждения, в особенности математические. Потребность в обобщениях силлогистики в целях полноты учения о доказательстве привела мегарских философов к анализу связей между высказываниями, взятыми как целое, без анализа их субъектно-предикатной структуры. Диодор Крон и его ученик Филон предложили параллельные уточнения отношения логического следования посредством понятия *импликации*. Диодор толковал импликацию как модальную (необходимую) условную связь, а Филон – как материальную. И тот же Филон сформулировал пресловутый *принцип двузначности*.

Эти идеи мегарской школы восприняли ранние стоики. Хрисипп принял критерий Филона для импликации и принцип двузначности как онтологическую предпосылку для логики. Идею дедукции стоики формулировали более чётко, чем мегарики: высказывание логически следует из посылок, если оно является консеквентом всегда истинной импликации, имеющей в качестве антецендента *конъюнкцию* этих посылок. Это исторически первая версия так называемого *принципа дедукции*. Аргументы, основанные на правильной форме дедукции, но допускающие ложность посылок, стоики называли *формальными*. Если же привлекалась содержательная истинность посылок, аргументы назывались *истинными*. Наконец, если посылки и заключения в истинных аргументах относились соответственно как причины и следствия, аргументы считались *доказывающими*. Последние предполагали участие естественных законов, которые стоики считали аналитическими истинами, отрицая возможность их эмпирического обоснования.

Стоическое учение о доказательстве выходило за пределы собственно логики, погружаясь в область теории познания. И здесь дедуктивизм стоиков встретил философского противника в лице радикального эмпиризма школы Эпикура, которая в споре со стоиками защищала опыт, аналогию и индукцию. Эпикурейцы положили начало *индуктивной логике*, указав, в частности, на роль противоречащего примера в проблеме обоснования индукции, и сформулировали ряд правил индуктивного обобщения (Филодем из Гадары).

На смену логической мысли ранней античности пришла античная схоластика, сочетавшая аристотелизм со стоицизмом. Она подменила искусство свободного исследования искусством экзегезы (истолкования авторитетных текстов), популярной и у поздних перипатетиков, и у неоплатоников.

Из нововведений эллино-римских логиков заслуживают внимания: логический квадрат (*quadrata formula*) Апулея из Медавры (реформированный позднее Боэцием); полисиллогизмы и силлогизмы отношений (Гален); дихотомическое деление понятий и учение о видах и родах (Порфирий); зачатки истории логики (Секст Эмпирик и

Диоген Лаэртий); наконец, ставшая с тех пор общепринятой латинизированная логическая терминология, восходящая к сочинениям Цицерона и латинским переводам из аристотелевского «Органона», выполненных Боэцием. В этот же период своей истории логика входит в число семи свободных искусств.

Логическая мысль раннего европейского средневековья беднее эллино-римской. Самостоятельное значение логика сохраняет лишь в странах арабоязычной культуры (аль-Фараби, Ибн Сина, Ибн Рушд), где философия остаётся относительно независимой от теологии. В Европе же складывается в основном схоластическая логика – церковно-школьная дисциплина, приспособившая элементы перипатетической логики к нуждам христианского вероучения. Только после того, как произведения Аристотеля (благодаря усилиям Фомы Аквинского) приобрели в ортодоксальной схоластике нормативный характер, возникает оригинальная (несхоластическая) средневековая логика, известная под именем *Logica modernorum*. Контуры её намечены «Диалектикой» Абеляра. Но окончательно она оформляется к концу XIII – середине XIV вв. в сочинениях Вильяма Шервуда, Петра Испанского, Иоанна Дунса Скота, Вальтера Бурлея (Бёрли), Вильяма Оккама, Жана Буридана, Альберта Саксонского и др. Именно здесь логическая истинность (доказуемость) и фактическая истинность (соответствие мысли и факта) строго разделяются, а логика понимается как формальная дисциплина о принципах всякого знания (*modi scientiarum omnium*). Учение о дедукции основывается, соответственно, на явном различении материальной импликации и импликации формальной, или тавтологичной. Для первой можно указать контрпример, для второй – нет. Соответственно, с последней ассоциируется понятие о логическом доказательстве. У логиков этой эпохи встречается и первая попытка аксиоматизации логики высказываний, включая модальности. При этом логика высказываний, как и у стоиков, признается более общей теорией дедукции, чем силлогистика. В этот же период, хотя и вне связи с общим течением модернизации логической мысли, зарождается идея «машинизации» процессов дедукции (Р.Луллий, «Великое искусство» – «*Ars magna*», 1480).

Эпоха Возрождения для дедуктивной логики была эпохой кризиса. Её окрестили как опору мыслительных привычек схоластики, как теорию «искусственного мышления», освящающую схематизм умозаключений, в которых посылки устанавливаются авторитетом веры, а не знания. Руководствуясь общим лозунгом эпохи, «вместо абстракций – опыт», дедуктивной логике стали противопоставлять логику «естественного мышления» (Пьер Раме), под которой обычно подразумевались интуиция и воображение. Леонардо да Винчи и Френсис Бэкон возрождают античную идею индукции и индуктивного метода, выступая с резкой критикой силлогизма. Лишь немногие, подобно падуанцу Якобу Дзабарелле («Логические труды» – «*Opera logica*», 1578), отстаивают формальную дедукцию как основу научного метода вообще.

В начале XVII в. положение логики радикально меняется. Галилей вводит в научный обиход понятие о *гипотетико-дедуктивном методе.* Он восстанавливает права абстракции, обосновывая потребность в абстракциях, которые «восполняли» бы данные опытных наблюдений, и указывает на необходимость введения этих абстракций в систему логической дедукции в качестве *гипотез*, или постулатов (аксиом), с последующим сравнением результатов дедукции с результатами наблюдений. В свою очередь, Гоббс, по примеру стоиков, заменяет атрибутивные связи аристотелевской силлогистики отношениями именования, представляя дедукцию как основанное на соглашениях исчисление функций именования (аналог пропозициональной функции). В то же время Гассенди пишет историю логики, а картезианцы А.Арно и П.Николь – «Логику, или Искусство мыслить» («*La logique ou L'art de penser*», 1662), в которой логика представлена как рабочий инструмент и наук, и практики.

Хотя Декарт имел оригинальные суждения о методах, отличных от дедуктивных, он всё же реабилитировал дедукцию (из аксиом) как «верный путь» к познанию. Однако он подчинил её более точным методам всеобщей науки о «порядке и мере», которую он называл *mathesis universalis*, и прообразами которой считал алгебру и геометрию.

Вслед за Декартом в том же направлении работали Иохим Юнг («Гамбургская логика» – «*Logica Hamburgiensis*», 1638), Блез Паскаль («О геометрическом разуме» – «*De l'esprit géométrique*», 1658), Арнольд Гейлинкс («Логика...» – «*Logica...*», 1662) и Джероламо Саккери («Наглядная логика» – «*Logica demonstrativa*», 1697), который широко использовал метод доказательства, получивший в средневековой логике название «тонкого следования» (*consequentia mirabilis*).

Однако главная роль в конкретном воплощении декартовских планов принадлежит, конечно, Лейбницу. Одна из основных «логистических» его идей состояла в том, чтобы свести к вычислению не только математические, но и любые умозаключения. С этой целью он преобразует абстрактную идею *mathesis universalis* в логически более ясную идею *calculus rationator* – идею универсального искусственного языка, формализующего любые рассуждения. Этим путём Лейбниц надеялся расширить границы демонстративного познания, которые до тех пор, по его мнению, почти совпадали с границами математики. Он отмечал (вслед за схоластами) важность тождественных истин логики для научного мышления, а в универсальном языке видел возможность *общей логики*, частными случаями которой считал силлогистику и логику евклидовских «Начал». Лейбниц не осуществил своего замысла, но он дал арифметизацию силлогистики, поставив тем самым совершенно новый для логики вопрос – вопрос о её внешней непротиворечивости.

Программа Лейбница не вызвала особого интереса в метафизической среде. Но из научного поля зрения она никогда не исчезала. В частности, её поддержали Иоганн-Генрих Ламберт («Об универсальном исчислении идей» – «*De universaliori Calculi idea*», 1765) и Г.Плуке («Философские и теоретические описания» – «*Expositiones philosophiae theoreticae*», 1782). Благодаря их трудам внутри традиционной университетской логики, не связанной с точными методами анализа рассуждений и носящей преимущественно описательный характер, сложились реальные предпосылки для развития *математической логики*. Правда, это развитие до середины XIX в. было приостановлено авторитетами Канта и Гегеля, считавших, что формальная логика не нуждается ни в каких новых изобретениях и оценивших математическое направление как не имеющее существенного значения.

Между тем, запросы развивающегося естествознания оживили почти забытое индуктивное направление в логике – так называемую *логику науки*. Инициаторами этого направления стали Дж.Гершель (1830), У.Уэвелл (1840), Дж.С.Милль (1843). Последний, по примеру Ф.Бэкона, сделал индукцию отправной точкой критики дедукции, приписав всякому умозаключению (в основе) индуктивный характер и противопоставив силлогизму свои методы анализа причинных связей (каноны Бэкона – Милля). Критика эта, однако, не повлияла на то направление логической мысли, которое наследовало идеи Лейбница. Напротив, скорее как ответ на эту критику (и, в частности, на критику идей У.Гамильтона о логических уравнениях) почти одновременно появились обобщённая силлогистика Огастеса де Моргана (1847), включившая логику отношений и понятие о вероятностном выводе, и «Математический анализ логики» («*The mathematical analysis of logic*», 1847) Дж.Буля, в котором автор переводит силлогизм на язык алгебры, а совершенство дедуктивного метода логики рассматривает как свидетельство верности её принципов. Позднее Буль («Исследование законов мысли» – «*An investigation of the laws of thought...*», 1854), С.Джевонс («Чистая логика» – «*Pure logic*», 1864), Ч.Пирс («Об алгебре логики» – «*On the algebra of logic*», 1880), Дж. Венн («Символическая логика» – «*Symbolic logic*», 1881), П.С.Порецкий («О способах решения логических равенств...», 1884) и Э.Шрёдер («Лекции по алгебре логики» – «*Vorlesungen uber die Algebra der Logik*», 1890–1905) окончательно опровергли тезис о принципиально неалгебраическом характере форм мысли, создав теорию «законов мысли» как вид нечисловой алгебры. Эта реформация в логике коснулась не только силлогистики (логики классов). В 1877 Х.Мак-Колл, впервые после схоластов, обращается к античной теории критериев логического следования и к идеям стоиков о логике высказываний, а Г.Фреге («Исчисление понятий» – «*Begriffsschrift*», 1879) создаёт первое исчисление высказывательных (пропозициональных) функций в строго аксиоматической форме. Он обобщает традиционное понятие предиката в понятии о пропозициональной функции, существенно расширяющего возможности отображения (представления) смысловой структуры фраз естественного языка в формализме субъектно-предикатного типа и одновременно сближающего этот формализм с функциональным языком математики. Опираясь на идеи предшественников, Фреге предложил реконструкцию традиционной теории дедукции на основе искусственного языка (исчисления), обеспечивающего более полное (чем силлогистика) выявление логической структуры мысли, всех элементарных шагов рассуждения, требуемых исчерпывающим доказательством. Фреге использует созданный им язык логики для формализации арифметики. Ту же задачу, но на основе более простого языка, осуществляют Дж.Пеано и его школа («Формуляр математики» – «*Formulaire de mathématique*». Т. 1–2, 1895–97).

Очевидным успехом движения за математизацию логики явилось его официальное признание на 2-м философском конгрессе в Женеве (1904). Правда, в общественном мнении оно утвердилось не сразу. Главным идейным противником применения математических методов к системе логических понятий был *психологизм* – методологический анализ логики с точки зрения психологической трактовки её основных понятий. Он воспринимал математизацию логики как своего рода возрождение схоластики, менее всего способное поставить логические исследования на научный фундамент[3]. Однако именно в этом пункте психологизм оказался антиисторичен. Борьба за мате-

[3] Коротко о психологизме: *Новосёлов М.М.* Психологизм в логике // Философский энциклопедический словарь. М., 1983; *Он же*: Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967. С. 419.

матизацию логики привела в дальнейшем к мощному развитию не только традиционной (аристотелевской логики), но и всей логической теории вцелом.

После «*Principia Mathematica*» (1910–1913) Б.Рассела и А.Уайтхеда – трёхтомного труда, систематизировавшего дедуктивно-аксиоматическое построение классической логики, создаётся многозначная логика (Я.Лукасевич, 1920; Э.Пост, 1921), аксиоматизируются модальная (К.Льюис, 1918) и интуиционистская логика (В.Гливенко, 1929; А.Гейтинг, 1930). Но главные исследования переносятся в методологию логических доказательств (в метатеорию логики): уточняются правила и способы построения исчислений и изучаются их основные свойства – ***независимость*** постулатов (П.Бернайс, 1918; К.Гёдель, 1930), ***непротиворечивость*** (Пост, 1920; Д.Гильберт и В.Аккерман, 1928; Ж.Эрбран, 1930) и ***полнота*** (Пост, 1920; Гёдель, 1930), появляются классические работы по логической семантике (А.Тарский, 1931) и теории моделей (Л.Лёвенхейм, 1915; Т.Скулем, 1919; Гёдель, 1930; Тарский 1931; А. И.Мальцев, 1936).

Начиная с 1930-х гг. закладываются основы изучения «машинного мышления» (теория алгоритмов – Гёдель, Эрбран, С.Клини, А.Тьюринг, А.Чёрч, Пост, А..А.Марков, А.Н.Колмогоров и другие). И хотя выясняется ограниченность этого мышления, проявляющаяся, например, в алгоритмической (машинной) неразрешимости ряда логических проблем (Гёдель, 1931; П.С.Новиков, 1952), в невыразимости всех содержательных истин в каком-либо едином формальном языке (Гёдель, 1931), а тем самым и невыполнимость лейбницевской идеи создания каталога вообще всех истин вместе с их формальными доказательствами, всё же растёт спрос на применение логики в вычислительной математике, информатике, кибернетике, технике (первоначально в форме алгебраической теории релейно-контактных схем, а затем в форме более общей теории анализа и синтеза конечных автоматов и пр.), а также в гуманитарных науках: психологии, лингвистике, экономике. Современная логика – это не только инструмент точной мысли, но и «мысль» первого точного инструмента, электронного автомата, непосредственно в роли партнёра включённого человеком в сферу решения интеллектуальных задач по обработке (хранению, анализу, вычислению, моделированию, классификации) и передаче информации в любой области знания и практики.

1.3. В круге втором. Дополнения

Таким образом, ответ на вопрос «Что такое логика?» можно дать, лишь опираясь на исторический анализ ведущих тенденций её развития и принимая во внимание, что её дифференциация «изнутри» постоянно дополняется интеграцией «снаружи». Но эта тема требует особого рассмотрения. Пока же я вновь обращусь к истокам и совершу как бы второй круг описания, повторив, возможно, некоторые темы, затронутые в круге первом.

Термин «логика» происходит от древнегреческого слова «*logos*». Это слово столь богато смысловыми оттенками, что ориентироваться на его этимологию для характеристики логики как науки в её современном значении было бы, конечно, опрометчиво[4]. Тем не менее, в духе традиции, с термином «логика» связывают и теперь ещё три (заимствованные из античности) основные идеи:

1) идею необходимой связи явлений объективного мира, его объективную законосообразность. И тогда говорят о «логике вещей» (например: «логика вещей сильнее логики человеческих намерений»);

2) идею необходимой связи понятий, посредством которой представляется истина как система. И тогда говорят о «логике знания»;

3) наконец, идею необходимой связи суждений, её (связи) законосообразность (логос – также закон) в форме доказательств. И тогда говорят о логике как особой научной дисциплине.

Первая идея, вообще говоря, лежит вне логики как науки и по существу светит только отражённым светом последней, её научным авторитетом.

Вторая идея выражает исторически пройденный логикой этап её развития в рамках диалектической философии познания. Однако в той её части, которая касается непосредственно формальных отношений понятий, эта идея реализуется в рамках современной логики классов (объёмов понятий).

Наконец, последняя идея относится к предмету логики в её собственном смысле, хотя понятие «доказательство» может при этом пониматься по-разному в зависимости от строгости рассмотрения и даже от философской установки.

В эпоху досократиков мы наблюдаем ещё робкие шаги, претендующие на связь терминов «логос» (разум) и «доказательство», причём, хотя и Гераклит, и Парменид оба говорят о логосе, вектор внима-

---

[4] Подробно о значении этого термина см.: *Трубецкой С.Н.* Учение о логосе в его истории. М., 1900.

ния при этом у них разный. Гераклит вкладывает в этот термин онтологический смысл. Его логос всеобщ и объективен. Мы сказали бы теперь, что логос – это некий верховный закон природы, который необходимо познать, если мы хотим коснуться истины. Для Парменида, напротив, логос имеет гносеологический смысл. Логос – это и есть сама истина.

Парменид развивает теорию познания по существу противоположную теории познания Гераклита. Если для Гераклита мышление служит ключом к познанию природы и логоса, то для Парменида мышление и есть сама природа: бытие и мышление тождественны. И поскольку это так, появляются основания определять сущее так, как требует разум, именуемый логосом. Иными словами, Парменид снимает противоположность между логосом и мыслью, утверждая, по сути, тождество мышления и бытия. Это позволяет ему на первое место поставить некоторые принципы мышления, которые теперь мы называем законами формальной логики. В первую очередь, это *принцип тождества* (истина равна себе – самотождественна и «недвижна»). Затем, *принцип противоречия* («быть и не быть невозможно»). И, наконец, *принцип доказательства путём приведения к нелепости* (*reductio ad absurdum*), который с успехом использовал его ученик Зенон.

Из этих принципов можно заключить, что у Парменида *логическое* выступает против *являющегося* в чувстве, *мысль* против наглядной *очевидности*. Таким образом, философия Парменида – это по существу начало господства логики в философском мышлении античности. «Парменид впервые высказал общую многим рационалистам мысль, что для проверки истинности и ложности, достаточно формальных начал мышления»[5].

Добавлю к этому, что хотя эпитет «логический», в смысле относящийся к правилам «проверки на истину и ложь», впервые употребил, по-видимому, Демокрит, лишь много спустя интуитивную идею доказательства заменит логическая идея «формальной правильности».

Именно тогда, когда акцент делается на форме связи суждений и её необходимом характере, подразумевают, что речь идёт о логике в собственном смысле как дедуктивной науке о методах доказательств и опровержений или, иначе, как аналитической (формальной, по определению Канта) теории способов рассуждений. И здесь я позволю себе маленькое отступление на тему об аналитичности.

Эта тема в логику была введена Кантом применительно к суждениям субъектно-предикатного типа. Несколько модернизируя словарь, можно сказать, что это тема классификации суждений по типу ин-

---

[5] *Троицкий М.* Учебник логики. М., 1886. С. 6.

формационной связи субъекта и предиката. Согласно Канту, суждение следует считать аналитическим, если выраженное в нём субъектно-предикатное отношение информационно тавтологично (если предикат этого суждения входит в число тех, что составляют содержание субъекта и может быть дедуктивно выведен из этого содержания). Суждение следует считать синтетическим, если его предикат сообщает о субъекте новую информацию по каким-либо внешним соображениям нелогического порядка. Например, суждение «Всякая трёхсторонняя геометрическая фигура является треугольником» будет аналитическим, поскольку признак «иметь три угла» логически (и семантически по смыслу терминов) выводится из общего понятия «трёхсторонняя фигура». Напротив, суждение «Сумма углов трёхсторонней геометрической фигуры равна 180°» будет синтетическим, поскольку его истинность зависит не только от содержания понятия «трёхсторонник», но и от других привходящих обстоятельств, в частности, от выбора типа геометрического пространства.

По существу, идейно восприняв лейбницевское разделение истин на логически необходимые и фактически необходимые, Кант продолжил указанную Лейбницем классификацию. При этом «необходимые истины» обрели двойное представление. Во-первых, – в виде аналитических суждений, во-вторых – в виде синтетических суждений *a priori*. Истинность аналитического суждения всегда априорна. Она устанавливается одним только логическим или семантическим (по смыслу терминов) *анализом*, или, как говорит Кант, «аналитическим способом достижения отчётливости» понятий путём расчленения их содержания (так что аналитичность оказывается по существу «виртуальной тождественностью»). Напротив, истинность синтетических суждений априорна лишь тогда, когда она определяется «конструктивным фактором» построения понятий. Поэтому синтетические суждения *a priori*, в отличие от суждений аналитических, имеют «творческий характер»: без помощи опыта посредством одного только разума они расширяют наше знание, сообщая ему статус аподиктической истины. Таковы, в частности, по Канту, не только все истины математики, но и значительная часть истин теоретической физики и трансцендентальной эстетики. Что касается синтетических суждений *a posteriori*, то они вполне соответствуют лейбницевским «истинам факта» – они всегда нуждаются в эмпирической (опытной) поддержке.

Эта кантовская классификация суждений почти вскоре оказалась предметом дискуссий. Сомнению подверглось жёсткое размежевание понятий «аналитический» и «синтетический». Фридрих Шлейермахер первый заметил, что ответ на вопрос о том, является ли некоторое суждение синтетическим или аналитическим, зависит от предшествующих ему определений. Если определение будет номинальным, то ответ сводится к соглашению о терминах; а если реальным, то, в силу неполноты знания (о субъекте), определение может оказаться неполным. Следовательно, в обоих случаях решение будет относительным, а не абсолютным. Более поздние критики в том же XIX в. отмечали, что чёткой границы между аналитическим и синтетическим провести нельзя в виду обычной объёмной неопределённости понятий. Поэтому, например, не исключено, что суждение может выглядеть аналитическим со стороны говорящего и синтетическим со стороны слушающего.

Появление *математической логики* позволило уточнить идею аналитичности на основе общего понятия о логических законах (общезначимых формулах логического языка). Аналитическими стали называть высказывания, которые истинны либо в силу их логической формы, либо в силу их сводимости к такой форме путём уточнения значения терминов. При этом и понятие и роль формы закона в логике заметно расширились. Форма стала подлинной *ratio justificandi* для логических выводов.

Вместе с тем, с возникновением *аналитической философии* подверглась критике и кантовская идея синтетических априорных суждений, а тезис об относительности понятий «аналитический» и «синтетический», по существу, стал общим местом в дискуссиях прагматической ориентации. В частности, У.Куайн, отмечая определённую разумность самой классификации, указывает на её зависимость от языка, в котором такая классификация принимается, и делает вывод, что, по сути, деление суждений на аналитические и синтетические есть «метафизический символ веры». Как бы там ни было, но на сегодняшний день любой вариант, оправдывающий необходимость указанной классификации, остаётся конвенциональным в рамках установок *логической семантики*.

Но вернёмся во времена Аристотеля. Тогда греки особенно увлекались *диалектикой* – искусством «спрашивать и отвечать». Изобретателем диалектики, по словам Аристотеля, был ученик Парменида философ Зенон Элейский. Он сформулировал несколько трудных задач – апорий или парадоксов, которые и в наше время остаются предметом обсуждения[6].

[6] См., например: *Яновская С.А.*, Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «апории Зенона»? // Проблемы логики. М., 1963.

Известно, что Зенон, как и его учитель Парменид, не пользовался такими терминами, как апория, парадокс или антиномия. По отношению к его аргументам это позднейшие этикетки. Зенон только указывал на несостоятельность суждений тех, кто пытался опровергнуть (либо попросту высмеять) основные постулаты элеатской школы. Как говорит Плутарх, Зенон практиковал «искусство – через противоречие загонять противника в безвыходное положение». А безвыходное положение это, по-видимому, более, чем апория. Поэтому, как я уже сказал, апории Зенона и называют парадоксами, антиномиями, а нередко даже и софизмами. Последний эпитет по отношению к аргументам Зенона, на мой взгляд, абсолютно неприемлем, если держаться строго логической их стороны[7] .

Чтобы снять возможные здесь недоразумения и облегчить читателю плавание в терминологических водах, я напомню содержание терминов «антиномия» и «парадокс», а о софизмах скажу позже[8] .

Для начала замечу, что оба указанных термина толкуются неоднозначно.

Термин «антиномия» (греч. Ἀντινομία – противозаконие) в историческом контексте означает расхождение (противоречие) между нормативными актами в рамках общей юридической системы права. Этот смысл термина восходит к античности, и в настоящее время вышел из употребления, уступив место термину «коллизия».

В богословской и общекультурной традиции термин «антиномия» сохраняется со времён Реформации в контексте возможного противоречия между церковным законом и верой. Богословская этика определяет как антиномичное всякое учение, допускающее нормы поведения, трудно совместимые (или вовсе несовместимые) с нормами евангельских или церковных установлений, в частности такое, согласно которому для благочестия закон не необходим, а достаточно веры (тезис Агриколы). В гражданском социуме антиномизм – это протест против гражданских или церковных законов.

В философском контексте термин «антиномия» был реанимирован Кантом. Он придал этому термину смысл противоречия, в которое неизбежно впадает разум, отваживаясь на суждения в мире явлений (возможного опыта). Кант называл такие суждения «умствующими», поскольку их нельзя ни доказать, ни опровергнуть. В то же время, в силу основоположений его философии, их нельзя и принять, ибо и

---

7 О том, как по-разному оценивались аргументы Зенона классиками философии см.: Досократики. Доэлеатовский и послеэлеатовский периоды. Минск, 1999.

8 А с содержанием термина «апория» можно познакомится по одноимённой статье в кн.: Философская энциклопедия. Т. 1. М., 1960.

та, и другая сторона противоречия вкупе образуют своего рода «мираж» трансцендентального применения разума. Следовательно, кантовское понимание антиномии, хотя и сохраняет видимость контрадикторного противоречия, под действие закона исключённого третьего не подпадает.

Наконец, в современной логике термин «антиномия» употребляют обычно наравне с термином парадокс, рассматривая их как синонимы. Теперь посмотрим, какой же смысл придаётся в культурной традиции термину «парадокс».

Заметим, что термин «парадокс» (греч. *παρά* – вне и *δόξα* – мнение) имеет по сей день, по крайней мере, два неравных значения – широкое и узкое.

В широком (внелогическом) смысле парадокс – это всё то, что так или иначе вступает в конфликт (расходится) с общепринятым мнением, подтверждённым традицией, законом, правилом, нормой или здравым смыслом. Здесь сохраняется родство с термином «антиномия». Парадоксальными в этом значении могут быть не только суждения (или рассуждения), но и поведение одного человека или группы людей, деятельность какой-либо школы или направления, и пр. Такова, например деятельность футуристического направления в европейском искусстве 10–20-х гг. XX в. с его лозунгом переоценки всех ценностей классической культуры («во имя прекрасного завтра сожжём Рафаэля, растопчем искусства цветы»). В философии парадоксальным в этом же значении можно считать движение софистов и школу киников, придавших сократовской теории понятий «софистический оборот». Иногда в эту же группу заносят и весьма безобидные явления, например, языковые иррегулярности, обусловленные развитием живой (разговорной) речи (парадоксы в лингвистике), а в школьной математике – элементарные ошибки, связанные с неосторожным использованием запрещённых правил (например, деления на нуль), что приводит к абсурдным результатам.

В узком (логическом) смысле парадокс – это «ситуация противоречия внутри теории», следовательно, противоречивость *дедуктивно оправданная*, обусловленная либо прямым непредикативным характером применяемых в ней понятий, суждений или определений, либо так или иначе связанная с непредикативностью[9].

Непредикативность (в традиционных терминах её называют ситуацией порочного круга или автореферентностью) встречается обычно в определениях, когда тот или иной объект вводится (или опреде-

[9] Подробнее о непредикативности: Философская энциклопедия Т. 4. М. 1967. С. 58–59.

ляется) через его отношение к некоторой совокупности ещё каких-то других объектов, частью которой при этом является и он сам. Такая ситуация может, хотя и не всегда, приводить к параллельному выводу двух импликаций ($\boldsymbol{A} \supset \neg \boldsymbol{A}$) и ($\neg \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}$) или, что то же, к эквиваленции ($\boldsymbol{A} \equiv \neg \boldsymbol{A}$), в чём, собственно, и выражается парадокс.

Например, определяя понятие «множество Рассела» как «множество всех множеств, не являющихся элементами самих себя», мы вводим множество Рассела как непредикативный объект, или, формально, как $\lambda x \neg (x \in x)$, где x – неопределённое имя для множеств, а λx – символ абстракции множества (класса). Чтобы убедиться в том, что эта непредикативность приводит к противоречию, достаточно рассмотреть суждение $\forall y\ (y \in \lambda x \neg (x \in x) \equiv \neg (y \in y))$, определяющее расселовский класс. В самом деле, пользуясь обычной аксиомой свёртывания и делая подстановку множества Рассела на место переменной y, приходим к противоречию указанного выше вида $\boldsymbol{A} \equiv \neg \boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{A}$ это $\lambda x \neg (x \in x) \in \lambda x \neg (x \in x)$.

Я думаю, что о парадоксе в собственном (строгом смысле), можно говорить в ситуации, когда контекст, ответственный за парадокс, принципиально неустраним *внутри* самой теории. Тогда можно сказать, что противоречие имеет абсолютный характер. Однако в большинстве случаев приходится сталкиваться с относительностью противоречия, так что парадокс означает только несостоятельность тех или иных допущений (посылок, постулатов или аксиом) теории, в которой обнаружены парадоксы. К примеру, от расселовского парадокса рассмотренного выше, можно избавиться, если ввести определённые ограничения на подстановку в аксиому свёртывания или воспользоваться принципом порочного круга, который в вольной и афористичной манере сформулировал сам Рассел: «Всё то, что охватывает *всех*, не может быть одним из этих *всех*», и который, по сути, накладывает запрет на подстановку в выражения, содержащие связанные переменные (подстановкой, проделанной выше, этот запрет был нарушен). Возможны, конечно, и другие решения, представленные (коль скоро речь идёт о множествах) в различных теориях множеств и в философских эссе.

И всё же, при всей относительности ситуации, зачастую не только трудно обнаружить или объяснить допущения, грозящие парадоксами, но и устранить их, не разрушая теорию. А если парадокс обнаружен, то первым и очевидным условием проверки на относительный характер противоречия (с целью устранения парадоксов) должна быть проверка на *тождественность* членов противоречия и на их *однородность*, либо на однородность аргументов, выставляемых в их защиту.

И те, и другие должны лежать в одном *интервале абстракции*. Если в паре ***A*** и не-***A*** (или в соответствующей ей формуле) невозможно отождествить ***A*** в обоих вхождениях, противоречие будет только *кажущимся* (термин Больцано). Но для возможности или невозможности указанного отождествления обычно необходима дополнительная информация. Например, чтобы констатировать противоречие в паре суждений ***A*** и не-***A***, где в первом вхождении ***A*** означает «быть в состоянии покоя», а во втором – «двигаться с нулевой скоростью» (оба суждения полезны при обсуждении апории Зенона), необходимо, по меньшей мере, обладать современным понятием скорости поступательного движения тела. В противном случае противоречие будет только кажущимся. В частности, отрицательным примером может служить зеноновский парадокс «Ахиллес и черепаха», если считать, что он относится к кинематике и направлен на опровержение движения. Банальный контраргумент «хождением» нарушает оба указанных выше условия и поэтому не заслуживает внимания.

Нередко считают, что парадоксы уже тем хороши, что они будят творческую мысль, помогая рождению новых идей и концепций. Возможно, это и так, если говорить о мысли, свободной от какой-либо готовой теоретической дисциплины. Но любая дедуктивная теория, опирающаяся на интуиционистскую или классическую логику, связана с условием непротиворечивости, которое как раз и является достаточным условием содержательной (объективной) значимости этой теории. И любопытно, что свобода от парадоксов для таких теорий имеет следствием (для большинства из них) их неполноту, то есть наличие таких осмысленных (с точки зрения этих теорий) суждений ***A*** и не-***A***, что ни одно из них недоказуемо в этих теориях, даже если какое-либо из них и представляется содержательно истинным (1-я теорема Гёделя). Иначе говоря, вынесение парадоксов за скобки эвристически не менее необходимо, чем их открытие.

Античные философы этих логических тонкостей, конечно, не знали. Но, по сути, Зенону принадлежит первый «штриховой портрет» аргументирующего рассуждения, использующего дедуктивные свойства противоречия, – одной из схем косвенного доказательства от противного[10]. А для этого Зенон, как отмечает Виндельбанд, использует метод «расщепления (*τέμνειν*) понятий», который позднее у него перенял Платон. Я бы сказал, что Зенон впервые применил *метод абстракции*. Не доверяя ни тем, кто учил о дискретности прост-

[10] Об этом также в моей ст.: Аргументация и непротиворечивость // Мысль и искусство аргументации. М., 2003.

ранства, ни тем, кто учил о его единстве и непрерывности, он исследовал вопрос абстрактно, «рассматривая сначала одно возможное решение его, а затем другое – прямо противоположное»[11]. А далее всё просто. Если при этом в каждом рассмотренном случае мы приходим к противоречию, то ни у одной из сторон не оказывается *решающего аргумента*. Правда, для этого мы не должны прибегать к запрещённым приёмам, вроде ссылки на эмпирический факт или авторитет. Ведь речь идёт об абстрактных (метафизических) сущностях как главном предмете философского анализа.

По поводу целей, которые имел в виду Зенон, формулируя свои аргументы, сказано много и далеко не всегда правильно. Более всего ошибались те, кто воспринял зеноновские апории как доказательство невозможности движения, данного нам в непосредственном восприятии. Вспомним-ка А.С.Пушкина:

> Движенья нет, – сказал мудрец брадатый.
> Другой смолчал и стал пред ним ходить.
> Сильнее бы не мог он возразить;
> Хвалили все ответ замысловатый.

Конечно же, Зенон не собирался ставить себя в смешное положение, отрицая очевидное. Своими рассуждениями он только указал на трудность, с которой сталкивается мысль, если рассматривать математическую модель движения как дискретный процесс последовательного перехода «от точки к точке» по существу (как раз в силу реальности движения) непрерывного отрезка пути. Тем самым, Зенон усматривал апорию в проблеме *континуума*, а не в проблеме движения. Поэтому опровергать аргументы Зенона «хождением», значит, допускать пресловутую ошибку *ignoratio elenchi*.

Непрерывное (движение) невыразимо (не представимо) дискретным образом, а всё невыразимое непознаваемо, а непознаваемое не существует (как учил Парменид). Следовательно, ни движения нет, а нет движения как дискретного процесса. И в этом смысле можно согласиться с мнением Больцано, что в основном «парадоксальные утверждения представляют собою предложения, которые либо непосредственно заключают в себе понятие о бесконечном, либо так или иначе опираются на это понятие»[12]. И антиномии Канта в этом же смысле следует рассматривать как «парадоксы бесконечного».

Разумеется, апории Зенона нельзя брать вне философской атмосферы, в которой они создавались. Пармениду приписывают не только знакомство с философией Пифагора, но и причастность к пифаго-

---

[11] *Виндельбанд В.* Платон. Киев, 1993. С. 67.

[12] *Больцано Б.* Парадоксы бесконечного. Одесса, 1911. С. 7.

ровой школе. И, возможно, что апории его ученика – это, прежде всего, возражение на числовой атомизм пифагорейцев[13]. Следует вспомнить, что согласно пифагорейцам, беспредельное (в частности, сумма бесконечного ряда $\boldsymbol{x} = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + \ldots$ в апории «Ахилл и черепаха») не может быть вычислено (определено) и, следовательно, не может быть познано. А неопределимое и непознанное (уже согласно Пармениду) не существует. Таким образом, единое (каким, несомненно, является движение) не представимо в виде последовательности дискретных моментов, характеризующих пифагорейские «единицы положения» (их безразмерные монады).

Мы сегодня, конечно, можем просуммировать бесконечный ряд и найти, таким образом, ту точку, в которой Ахилл догонит черепаху. Но своим превосходством над великим греком мы обязаны классическому *методу предельного перехода*. А это далеко не безупречное превосходство с точки зрения интуиционистской модели анализа. Греки предельного перехода не знали. Интуиционисты не хотят его принимать и теперь, поскольку в нём скрыта существенно необоснованная предпосылка, состоящая в том, «что некая бесконечная последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершённость которой мы не можем себе даже и представить (не только фактически, но хотя бы в принципе), на самом деле всё-таки должна завершиться»[14]. Эта предпосылка называется *абстракцией актуальной бесконечности*. Она составляет философскую основу теоретико-множественной логики.

Однако и метод упрощающих *непротиворечивых идеализаций*, которым предлагается такого рода трудности разрешать, вряд ли можно принять как объяснение онтологического содержания бесконечных процессов «самих в себе», если иметь в виду их физическую суть. Следовательно, и сегодня остаётся актуальным вопрос: «Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием “апории Зенона”»[15].

Для сравнения остановлюсь на другой апории Зенона, опровергающей существование многого на основании следующих аргументов. Допустим, что многое (множественность) существует. Тогда оно должно быть *ограниченным* и выражаться *числом*. По крайней мере, так говорит пифагорейский тезис, согласно которому все вещи суть числа. Так это и с современной точки зрения (в силу теоретико-множе-

---

[13] Этого мнения придерживался и Поль Таннери.

[14] *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979. С. 40.

[15] См.: Проблемы логики. М., 1963 (статья *С.А.Яновской*).

ственного понимания числа). Но если многое выразимо каким-либо числом, то оно выразимо и большим числом, ведь к каждому числу можно прибавить новое число (абстракция потенциальной осуществимости). Следовательно, оно вообще не выразимо числом (в силу самой идеи однозначной числовой представимости множеств). Отсюда следует, что многое *не ограничено*. А это противоречит допущению. Следовательно, многое не существует.

Грубо схему этого умозаключения можно написать на языке логики высказываний следующим образом: $\alpha \supset \beta, \beta \supset \neg \beta \vdash \neg \alpha$**.** Но из этой записи видно, что эта апория не является парадоксом. Это один из вариантов косвенного доказательства. Апория показывает, как элеаты на содержательном уровне использовали дедуктивные свойства противоречия, связанные с (объёмной) неопределенностью понятий.

А вот ещё один вариант той же апории. Допустим, что многое существует и оно выражено числом. Число не может характеризовать точку (монаду), поскольку та не имеет величины. Следовательно, многое – это, по крайней мере, отрезок. Но любой отрезок представим парой чисел, между которыми всегда можно вставить новое число. И этот процесс можно продолжать до тех пор, пока мы не придем к монадам («единицам положения»), не имеющим величины. Но, очевидно, что сумма монад, не имеющих величины, невыразима числом. А это противоречит допущению.

Этот аргумент Зенона также легко представить логически общезначимой схемой: $(\alpha \,\&\, \beta), \neg \beta \vdash \neg (\alpha \,\&\, \beta)$. Следовательно, и это не парадокс, а только апория. Отчасти дело тут в прояснении понятий. Элеаты ещё не умели представлять «единое» как интегральную сумму неограниченно возрастающей «множественности» бесконечно малых величин. Просто они таких величин не знали. А пифагорейские монады для этого не годились. Но если заменить понятие «монада» известным нам теперь из классического анализа понятием бесконечно-малой величины, противоречие исчезнет (на что и указывает практика интегрального исчисления). Однако основания для размышлений в контексте античной онтологии, тем не менее, остаются. Естественный повод для этих размышлений даёт нам, в частности, *нестандартный анализ*[16].

Выше уже говорилось, что апории Зенона нередко называют *софизмами*. Однако, как мы только что видели, некоторые из его апорий могут быть представлены в виде умозаключений, приводимых, говоря современным языком, к форме логического закона. Аристотель был

16 О нестандартном анализе в кн.: *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ. М., 1980; *Успенский В.А.* Что такое нестандартный анализ? М., 1987.

прав, называя Зенона диалектиком, а не софистом. Такими же искусными диалектиками, перенявшими манеру Зенона использовать дедуктивные свойства противоречия, были философы Сократ и Платон. В диалектике вопросы и ответы должны были служить одной цели – прояснять «суть дела», помогать найти истину. Мы и теперь ещё говорим «в споре рождается истина».

Но известно, что антиподом диалектики тогда была как раз *софистика*.

Исходя из практики диалогического спора, софисты и их сторонники поставили под сомнение самый вопрос о постижении истины посредством спора. Они выдвинули принципиально иные цели дискуссии – успех в диспуте и практическую выгоду, даже если при этом наихудший аргумент приходится защищать как наилучший с помощью различных уловок в речи и в рассуждении. При этом они стремились создать видимость доказательства при очевидной неверности (порой абсурдности) результата за счёт хорошо замаскированных ошибок. Так, рассматривая равенство «5 = 2 + 3», софист замечает, что 2 – это чётное число, а 3 – число нечетное. Следовательно, говорит он, вопреки утверждениям математиков число 5 одновременно чётно и нечётно.

Понятно, что в этих условиях возник интерес к изучению и систематизации таких приёмов рассуждения, которые впоследствии получили название логических ошибок – *паралогизмов* (если ошибка не была преднамеренной) и *софизмов* (если ошибка делалась сознательно). Так, путём анализа, постепенно выявлялся характер ложных (мнимых) доказательств и формировались основы научной теории доказательств. Следовательно, логика как наука родилась ещё в ранней античности из двух противоположных по целям «интеллектуальных игр» – диалектики и софистики. «Топика» и «О софистических опровержениях» – самые ранние логические сочинения Аристотеля, в которых исследуются диалектические и софистические способы рассуждений.

Вот какой вывод из дальнейшего развития этих идей сделал выдающийся голландский математик и логик Эверт Бет: «Диалектика, – писал он, – с самого начала её возникновения разделилась на три основных учения, из которых только одно развивалось неуклонно и непрерывно, так что в наши дни только одна логика представляет собой солидную конструкцию, важность которой для научной мысли не может быть всерьёз поставлена под сомнение. Искусство спора и метафизика, напротив, демонстрируют худшие черты старения и как будто бы осуждены влиться в логику»[17].

17 *Beth E. W.* «Dialectica». 6. 1948. P. 117–118.

Исторически было как раз так, что предмет собственно логики (формальной логики) ограничивался каталогизацией *правильных аргументов*, то есть таких способов рассуждений (умозаключений), которые позволяли бы из истинных суждений-посылок *всегда* получать истинные суждения-заключения. Таким образом, в этом смысле, представляя логические основания для *корректности* нашей мысли (в ходе рассуждений, выводов, доказательств, опровержений и пр.), логика создавалась как *наука о правильном мышлении*[18] .

Выше шла речь об основной задаче логики – каталогизации правильных аргументов (правильных форм рассуждений). Известным со времён античности набором таких аргументов определился так называемый *процесс дедукции* (от лат. *deductio* – выведение), то есть процесс «извлечения следствий» путём движения мысли «от общего к частному», когда началом (*посылками*) рассуждения (умозаключения) полагают какие-либо основополагающие истины (аксиомы, постулаты, нормы морали и права или просто гипотезы), имеющие характер *общих утверждений* («общее»), а его концом – логические следствия из посылок, теоремы («частное»). Таким образом, дедукция – это цепь умозаключений (рассуждение), все звенья которой (цепи) связаны отношением *логического следования* – основным понятием логики.

Как известно, первый набор дедуктивных аргументов предоставила науке *силлогистика* – теория, созданная Аристотелем ещё за три столетия до нашей эры. Этот набор долгое время был единственным, с которым связывали представление о логике. Но по мере изучения особенностей демонстративного мышления этот набор постепенно расширялся за счёт несиллогистических, хотя и дедуктивных способов рассуждения. Так появилась *логика высказываний*, контуры которой были намечены философской школой стоиков.

Вместе с тем, параллельно изучению дедуктивного движения мысли от общего к частному, шло изучение своего рода обратного процесса – умозаключения «от частного к общему», от фактов к некоторой гипотезе (общему заключению). По существу, это вид рациональной (эвристической) оценки (интерпретации) фактов, позволяющий предвидеть или предсказывать явления природы и общественной жизни с некоторой (нередко достаточной) степенью правдоподобия. Такой процесс получил название *индукции* (от лат. *inductio* – наведение), роль которой в практике научного исследования определялась естественной

[18] Спустя столетия реальная область применения логики как теории определённого вида структур (первоначально в форме так называемых булевых алгебр) оказалась значительно шире: это вычислительная математика и электроника, информатика и психология, лингвистика и экономика.

необходимостью обобщений. Поскольку индукция выпадала из рамок логики как дедуктивной теории (или совокупности таких теорий), она, в конце концов, сделалась предметом особой теории, названной *индуктивной логикой*. Первые шаги на пути создания этой логики были сделаны в философской школе Эпикура[19].

Конечно, формальная логика в её современном виде заметно отличается от логики предшествующих эпох, в частности, от традиционной, так называемой школьной логики, упростившей, но в основном сохранившей теорию Аристотеля. Эта школьная логика (она и теперь ещё служит на ниве гуманитарного образования в вузах России) формулировала свои «принципы» не по модели дедуктивно организованной формальной (или абстрактной) структуры, а в виде нормативных предписаний без каких-либо доказательств их независимости, полноты и непротиворечивости. По существу «она не очень-то выходила за рамки психологии и социологии и описывала логическую реальность так, как в социологии описывают нормы, действующие в данном обществе»[20].

В отличие от логики традиционной, современная логика в полном смысле формальна. Для неё характерно построение различного рода *формализованных теорий* логического вывода – так называемых *логических исчислений*, позволяющих сделать логические аргументы (правила и формы умозаключений) предметом по-настоящему строгого (по существу математического) анализа и тем самым полнее описать их свойства. Такое отображение логической мысли в логических исчислениях соответствует и более адекватному представлению идеи «логоса» как *единства языка и мышления*. В современной логике это представление столь очевидно, что, исходя из различных формализмов, можно говорить о различных *стилях логического мышления*. Логика из «чёрно-белой» стала «цветной», преодолев убеждение немецкого философа Канта, что логика уже к концу XVIII в. стала «наукой вполне законченной и завершенной»[21].

Отождествляя логику и науку о доказательстве, естественно сказать несколько предварительных слов о самом *доказательстве*[22].

Это понятие можно толковать в широком и узком (собственном) смысле. В широком смысле под доказательством обычно понимают всё то, что убеждает в истинности чего-либо, в том числе (но не обяза-

---

19 См.: *Leśniak K.* Filodemosa traktat o indukcji // Studia Logica. T. II. Warszawa. 1955.

20 *Piaget J.* Traité de logique. P., 1949. P.13.

21 *Кант И.* Соч. Т. 3. М., 1964. С. 82.

22 Подробное неформальное изложение темы «Доказательство в логике» читатель найдёт в одноимённой ст. в кн.: Философская энциклопедия. Т. 2. М., 1962. С. 44–48.

тельно) и системы рассуждений с интуитивно значимым характером (набором) аргументов, законность которых является, вообще говоря, вопросом степени. Это особенно заметно в гуманитарной области с её объёмно-неопределёнными понятиями. В этом случае доказательство не связано необходимо с логикой, и его более естественно рассматривать просто как *обоснование*. Так, когда говорят о доказательстве в юридическом смысле (в праве), то, прежде всего, имеют в виду фактические, так называемые вещественные данные о любых обстоятельствах, имеющих значение для правильного разрешения уголовного или гражданского дела. Аргументами доказательства в этом смысле служат свидетельские показания, заключения экспертов и тому подобные вещи, убеждающие непосредственно, хотя, конечно, многое может быть обосновано и рассуждением, использующим логику.

Когда доказательство проводится только средствами, принятыми в логике, говорят о *логическом доказательстве* в узком (или собственном) смысле. Его главная схема – *схема дедукции*. Если добавление к какой-либо интуитивной логике (или исчислению) посылок $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$, вообще говоря, не принадлежащих этой логике, позволяет, тем не менее, по её правилам вывести (получить) из этих посылок заключение β, то в нашей логике уже без этих посылок должна быть допустима импликативно истинная формула (теорема) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n \supset \beta$ или правило, соответствующие полученному выводу.

Выяснение вопроса о том, когда одно предложение «влечёт» другое, открывает чисто теоретическую возможность обоснованного познания. Очевидно, что логический путь требует определённых умозаключений, причём умозаключений, не основанных ни на каких фактических экспериментах. Эту чрезвычайно важную особенность логического (теоретического) познания подчёркивал Лейбниц, возражая на замечания Локка «о ничтожной пользе силлогизмов». Только аксиомы и правила логического вывода дают гарантию истинности заключения, если мы основываемся на истинных (достоверных) данных. Следовательно, изучать логику – это изучать логические средства, которые позволяют проводить такие доказательства. Можно сказать, что это общезначимые нормы поведения для нашего мышления.

Но, как не все люди руководствуются юридическими нормами в своём поведении, так не все руководствуются правилами (нормами) и законами логики в своём мышлении, даже не все те, кто обязан к этому *ex professo*. К примеру, несмотря на то, что заключения юристов по сути своей дедуктивны, эти заключения, по мнению Бертрана Рассела, «редко предстают в строгой логической формулировке». Обычно в них используются «некоторые эмпирические соображения до и после общих посылок»[23]. Между тем, замечает Рассел, юридические законы вытекают из общих принципов, и судьи должны уметь применять эти принципы к конкретным обстоятельствам.

Конечно, все люди, так или иначе, причастны к искусству рассуждения, поскольку им приходится самим рассуждать или выслушивать (анализировать) рассуждения других. Но в большинстве случаев эта причастность является стихийной, интуитивной без ясного понимания основ, без системы необходимых правил, которые бы оправдывали общезначимость хода рассуждения, перехода от одних суждений к другим.

Вообще, правильный образ мыслей – редкость. Можно найти массу тому примеров, как в печатных изданиях, так и в заявлениях официальных лиц или обычных граждан. Хорошо это или плохо – это уже другой разговор. Многое, конечно, зависит от контекста. Однако, как заметил индийский государственный деятель Джавахарлал Неру, важно отдавать себе отчёт в том, что «хотя порой удаётся различить логический ход мыслей человеческого разума, тем не менее... разум отдельного человека представляет собой клубок противоречий, и его действия трудно примирить между собой»[24].

Мышление – это функция нашей общественной жизни. В то же время, как физиологический и психологический акт, оно имеет принудительный характер. Нельзя волевым решением отказаться от мысли – не думать вообще. Но при этом (например, при «спутанности сознания») течение мыслей может быть непроизвольным и неорганизованным. Организованное мышление предполагает некоторую структурированность акта мышления. При этом также возможна определённая принудительность мышления. Если эта принудительность отвечает определённой задаче – от истинных мыслей всегда приходить к истинным мыслям, такая принудительность должна быть логической: она должна выражать связь мыслей по определённым фиксированным правилам (нормам), отражающим соответствующие закономерности мышления, движения мысли от истины к истине.

Выражаясь теперь более общо, скажем, что логика изучает такие закономерности в сфере мышления, которые гарантируют его истинность. Вот что в связи с таким пониманием логики писал один из основателей современной (математической) логики немецкий логик Готлоб Фреге: «Слово “прекрасное” направляет эстетику, слово “доброе” – этику, а слово “истинное” – логику. Конечно, истина является целью любой науки; но логика связана с ней совсем иным способом.

---

23 *Рассел Б.*, Искусство мыслить. М., 1999. С. 36.
24 *Неру Дж.* Открытие Индии. Кн.1. М., 1989. С. 279.

Логика соотносится с истиной примерно так же, как физика – с тяготением или с теплотой. Открывать истины – задача любой науки; логика же добивается познания законов истинности»[25].

Говоря о законах истинности, уместно вспомнить о термине «умозаключение», который нередко отождествляют с термином «вывод». Отмечу, что умозаключение – это процесс, который реализует в плане «внутренней речи» связи понятий, присущие индивидуальному или общественному сознанию. И в этом смысле нормы и типы таких связей служат его психологической основой. Конечно, процесс умозаключения непосредственно связан с процессом познания. Умозаключение – это одно из действий, обогащающих наше познание. Мы умозаключаем тогда, когда из имеющихся в нашем распоряжении сведений хотим извлечь необходимую нам информацию, полагаясь только на нашу собственную способность к рассуждению. Однако умозаключение и логический вывод это, вообще говоря, не одно и то же. В отличие от умозаключения логический вывод строится с опорой на «внешние средства» путём знаковой записи мысли с целью довести до минимума «подсознательные», «энтимематические», «эллиптические» её элементы, перевести «свёрнутый» ход мысли на язык наглядных образов, именуемый её формализацией. В отличие от вывода умозаключение может и не иметь логической основы в её дедуктивном смысле. Например, неполная индукция – это именно умозаключение, а не вывод, поскольку её основу образуют психологические нормы (акты) генерализации, а не принудительное движение от посылок к следствию.

Существует множество (и порой очень важных) примеров тому, что изучение логики совершенно необходимо в целях выработки тех элементарных логических навыков, которые требуются для умозаключений, претендующих на получение истинных результатов познания.

Изучение логических правил умозаключений (знакомство со схемами логически правильных умозаключений) не гарантирует, конечно, от ошибок в самостоятельных рассуждениях. Однако оно повышает *качество мышления*, степень сознательного контроля над правильностью рассуждения, помогает, по крайней мере, предупредить явные ошибки логического характера. Знание правил логически правильных рассуждений воспитывает умение распознавать неверные умозаключения не только свои, но и умозаключения своих оппонентов. Тот, у кого не развита способность к формулировке и выражению своих мыслей, умение связывать их в логически последовательную це-

[25] *Фреге Г.* Логические исследования. Томск, 1997. С. 22.

почку умозаключений (доказательств), вряд ли сможет активно влиять на окружающих и корректно добиваться желаемых результатов в процессе своей работы. Тот, кто логически менее подготовлен, обычно совершает больше ошибок в самостоятельном мышлении и в своих умозаключениях, нежели тот, кто получил в логике достаточную тренировку.

Современная формальная логика – преемник традиционной. Но для современной логики характерны, во-первых, разнообразие теорий, в которых изучаются способы рассуждений, приемлемые с точки зрения каждой такой теории, а, во-вторых, полная *формализация* этих способов, отображение их в логических исчислениях, что, как я уже отметил выше, обеспечивает более адекватную реализацию идеи «логоса» как единства языка и мышления.

На тему «исчисление» мы подробнее поговорим в другой беседе. А пока отметим, что логическое исчисление обычно определяется как формальная структура возможных дедукций. Выбор такой структуры как представителя определённых логических идей и, соответственно, осмысление её формальных объектов (или рассмотрение её как семантической системы) превращает логическое исчисление в определённую теорию приемлемых способов рассуждений. Сообразно тому, как уточняется понятие «приемлемое рассуждение», различают классические, интуиционистские, конструктивные, модальные, многозначные, релевантные, паранепротиворечивые и другие теории логического вывода.

При всём допустимом их различии каждая из названных теорий включает, как правило, два основных раздела: *логику высказываний* и *логику предикатов*. В логике высказываний учитываются не все смысловые связи фраз естественной речи, а только такие, которые позволяют, рассматривая сколь угодно сложные высказывания как функции истинности простых (атомарных), выделять в множестве высказываний универсально истинные высказывания – *тавтологии*. Если в логике высказываний отвлекаются от понятийного состава высказываний (их субъектно-предикатной структуры), то в логике предикатов, напротив, сохраняя характер смысловых связей логики высказываний, дополняют их анализом субъектно-предикатной структуры, анализом того, как эта структура влияет на структуру логического вывода. В исчислениях предикатов первого и высших порядков субъектно-предикатная структура суждений анализируется с большей глубиной, чем в традиционной силлогистике: помимо свойств («одноместных» предикатов), в них формализуются и отношения («многоместные» предикаты).

В многообразии логических теорий выражается многообразие требований, предъявляемых к логике современной наукой и практикой. Важнейшим из них является требование в содействии точной постановке и формулировке научно-технических задач и разысканию возможных путей их разрешения. Этим объясняется, в частности, растущее число логических теорий, отвечающих не только запросам оснований математики, но и запросам междисциплинарных исследований, в особенности в области искусственного интеллекта. Предлагая строгие методы анализа определённых аспектов реальных процессов рассуждений, логические теории представляют собой адекватное отображение объективной «логики вещей» на ступени абстрактного мышления. Тем самым они содействуют и объективному анализу положения вещей в той области знания, которая отражается в соответствующих процессах мысли.

По мере использования логических исчислений в качестве необходимой «техники мышления» собственное идейное содержание логических теорий совершенствуется и обогащается за счет развития старых и создания новых разделов логики. Примером может служить «второе рождение» силлогистики или, обусловленное задачей обоснования математики, возникновение теории доказательств (метаматематики) – в узком смысле как теории формальных систем, ограниченной рамками *финитизма*, и в широком – как *металогики*, воплощающей взаимодействие формальных (синтаксических), содержательных (семантических) и деятельностных (прагматических) аспектов познания. Многие результаты, относящиеся к взаимоотношению формальных логических систем и их моделей, а потому имеющие и общенаучное значение, получены как металогические теоремы (напр., о наличии счётной модели у любой непротиворечивой теории, формализуемой в языке логики предикатов первого порядка, о неразличимости в языке той же логики несчётных моделей, о неполноте формальных систем, включающих арифметику, и ряд др.), раскрывающие гносеологический подтекст самой логики.

1.4. В круге третьем. Логика и аргументация

Почти все гуманитарные учебники по формальной логике, появившиеся за последние несколько лет, содержат раздел, посвященный аргументации. Поэтому стоит разобраться с вопросом о том, как соотносятся между собой два понятия – «логика» и «аргументация».

Термин «аргументация», равно как и термин «логика», может рассматриваться с различных точек зрения. В его содержании естественно резюмируется то, что люди думали о процессах интеллектуального общения, как они описывали дискурс и какие рациональные средства и системы изобретали, когда они размышляли о языке и актах коммуникации. При этом доминирующая идея, начиная с античности, заключалась в противопоставлении строгих рассуждений (подчинённых формальным правилам) рассуждениям нестрогим, возможно даже логически порочным, таким, например, как софизмы.

Идеал строгости выработался, конечно, не сразу. По-видимому, Аристотель первый понял определяющую роль формальных правил для оценки строгости рассуждений. Однако и до, и после Аристотеля, и по сей день продолжает жить интуитивная идея дискурса, связанная с *естественной логикой* рассуждений[26] , – с той логикой, имеющей дело с той врождённой суммой правил, «которую мы находим в своём сознании прежде, нежели начинаем рассуждать»[27] . Не случайно же ещё в античности, разделив понятия, идею доказательства стали противопоставлять идее диалектической речи, когда рассуждения допускаются произвольные, лишь бы достигалась поставленная этими рассуждениями цель. В итоге исторические превратности в эволюции понятий диалектики и риторики оказали очевидное влияние и на понятие аргументации, которое некоторым образом пострадало от идейного родства с ними. Термин «аргументация» стал применяться в уничижительном смысле и по преимуществу в контексте спекулятивной мысли в процессах беседы или диспута, то есть как квазилогическое средство диалога.

Исправляя отчасти эту историческую несправедливость оценок, я предлагаю краткое определение термина «аргументация», чтобы в дальнейшем было легче разделять различные его аспекты:

Аргументация – в теоретическом плане 1) это технология «убеждающего мышления»; в практическом плане 2) это метод подведения оснований под какую-либо мысль или действие (обоснование их) с целью их публичной защиты, побуждению к определённому мнению о них, признания или разъяснения; способ убеждения кого-либо посредством значимых аргументов. В этом смысле аргументация всегда диалогична и шире логического доказательства (которое по существу

26 *Borel M.-J., Grize J.-B., Miéville D.* Essai de logique naturelle. Berne–Francfurt a/M.– N. Y., 1983.

27 *Герцен А.И.* Собр. соч. Т. 2. М., 1954. С. 73.

безлично и монологично), поскольку она ассимилирует не только «технику мышления» (собственно логику), но и «технику убеждения» (искусство подчинять мысль, чувство и волю человека).

Основные аспекты аргументации: *фактуальный* (информация о фактах, используемых в качестве аргументов), *риторический* (формы и стили речевого и эмоционального воздействия), *аксиологический* (ценностный подбор аргументов), *этический* (нравственная приемлемость или дозволенность аргументов) и, наконец, *логический* (последовательность и взаимная непротиворечивость аргументов, их организация в дедуктивный вывод).

Все эти аспекты аргументации взаимно дополняют друг друга. Первый определяет «материю» аргументации, а остальные – её форму, «форму сказывания». Правда, их значимость может варьировать в зависимости от конкретной ситуации. Например, в обиходе чисто логические средства аргументации используются редко. В свою очередь, правильный логический вывод не зависит от интуитивной убедительности посылок и аксиом. Его принудительность (обязательность, общезначимость) – в правилах перехода от посылок (или аксиом) к итоговой нашей мысли (заключению) и, следовательно, в определённой взаимной связи суждений. Если же при этом имеет место убеждённость в истинности посылок и аксиом, то логический вывод становится логическим доказательством, то есть самым сильным вариантом аргументации. А как заметил Аристотель, аргументировать необходимо так, чтобы всё находящееся вне области доказательства стало излишним. Однако *de facto* это всего лишь цель, и цель, причём, недостижимая.

Сравнивая логическую и естественную аргументацию как две соседствующие части интеллектуальной технологии, подчеркну, что обе они, претендуя на обоснованную выводимость своих заключений, существенно расходятся в особенностях и силе вывода. Именно в силу особенностей вывода только теоретическая логика по праву может считаться «доказывающей наукой», поскольку «логический вывод» плюс «истина» – это *всегда доказательство*, чего нельзя сказать о естественной аргументации. Жизненной действительной основой для интуиции, поскольку она может эмансипироваться от логики, остаются риторический, этический и аксиологический её аспекты, главным элементом которых является *оценочный аргумент*, который, вообще говоря, не имеет ничего общего с аргументом логическим. Логический аргумент сам по себе является объективным и безличным. Оценочный аргумент, напротив, является по преимуществу личностным.

Очевидно, что личностный аспект аргументации не может не влиять на её организацию, на выбор соответствующей тактики или стратегии. Если для логики аналитический или синтетический пути рассуждения равнодопустимы, то для аргументации с её психологической ориентацией выбор того или иного пути может оказаться существенным. Использование оценочных аргументов в адрес «чужого дискурса» превращает аргументацию в акт коммуникации, делает её, с одной стороны, принципиально диалогичной, даже если это «скрытый диалог», заранее не рассчитанный на публичное обсуждение, а с другой, — односторонне ограниченной. Как отметил ещё Аристотель, всего резче видят одну сторону те, которые видят мало сторон.

Другое важное отличие теоретической логики от естественной — это организация дискурса. Поскольку интуитивная аргументация предназначена не к доказательству, а к убеждению, аргументы с вариантами связи «следовательно» (прогрессивная связь) и «ибо» (регрессивная связь) должны быть различены. Убедительность дискурса может действительно зависеть от порядка, в котором представляются суждения в соответствии с тем, что имеют в виду и какую цель необходимо достичь.

Связанное с этим обстоятельство отмечает и Робер Бланше: «Когда говорят, что одно предложение вытекает из другого, то под этим понимают обычно, что оно является логическим следствием другого. Этот смысл, разумеется, корректен, но он слишком тесен. Не следует забывать, что отношение принципа к следствию может восприниматься мыслью в двух смыслах. Прямой операции, которая ведёт от принципа к следствию, соответствует обратная операция, которая ведёт от следствия к принципу. Как это обычно бывает с обратными операциями, она более ущербна и более рискованна. Но она так же, как и прямые операции, является операцией нашего разума. Именно в силу наличия обратной операции мы должны в первую голову расширить определение рассуждения таким образом, чтобы сохранить в рассуждениях место для вероятных заключений... Этот широкий смысл слова “вытекать” полностью соответствует языковой практике...» И «хотя логическая связь между предложениями, которые её образуют, будет нервом любого рассуждения, это не означает, что предложение, которое из них вытекает в качестве следствия, будет непременно логическим следствием предложений, которые берутся в качестве посылок. Необходимо зарезервировать случай, когда инверсируется не сама, конечно, логическая зависимость, но характер её использования в проведении того или иного рассуждения»[28].

[28] *Blanché R.* Le raisonnement. P., 1973. P. 12–13.

Следовательно, в сфере обоснования задачи естественной логики (аргументации) иные, чем в логике теоретической. Последняя озабочена выводом. Аргументация – приведением (поиском) оснований (*raisons*), понимая их часто как повод для умозаключений по аналогии (включая риторическую) или в том смысле, который отмечал Лейбниц, говоря об априорном характере оснований как конечных причин. А это означает, что разумный (аргументирующий) довод (*raison*) это не обязательно вывод (*inference*).

Как определил Х.Перельман, основания – это просто аргументы, которые мы выставляем за или против тезиса, тогда как вывод обязательно предполагает правила. В этом смысле поле аргументации свободно. Аргументы здесь могут подчиняться эпистемологическим, психологическим или прагматическим целям и носить квазилогический характер. И хотя названные цели обычно лежат в одной плоскости, их пересечения бывают порой драматичны. Например, как ни сильна была в научном смысле аргументация Галилея в защиту учения Коперника, но она оказалась бессильной перед прагматическими аргументами доминиканских иезуитов.

Из одного этого примера видно, что аргументация в широком смысле выходит не только далеко за границы логики (впрочем, при субъективном формировании посылок, не исключая и логических аргументов, как это было в случае суда над Галилеем), но и за границы доверительного отношения к фактам. Этот же пример говорит и о том, что никакой свод правильных аргументов, утверждённый наукой об аргументации, не сможет обеспечить защиту истины, если эта истина противоречит господствующей социальной доктрине или предрассудкам толпы. Иными словами, экзотерический аспект аргументации (в отличие от эзотерического) предполагает анализ социального окружения (контекста) любого аргументативного процесса.

В частности, это очевидно в сфере философских идей, где проблема обоснования ставится иначе, чем в логике. Она не исключает задач на доказательство. Но ни одна философская концепция не может претендовать на её доказуемость, хотя бы потому, что реальная жизнеспособность философских идей вообще коренится исключительно в поле многочисленных ***Pro*** и ***Contra***. Правда, коренится она только тогда, когда для ***Contra*** имеется реальная возможность преодолеть ***Pro*** с более высокой точки зрения, вникнув в сильную сторону ***Pro*** и поставив себя в сферу действия этой силы. А это означает, что заслуживающие внимания философские концепции не только не доказуемы, но и не опровержимы в классическом логическом смысле термина «опровержение». Их отрицание не подпадает под действие *tertium non datur*, поскольку оно никогда «не должно идти извне, т.е. не должно исходить из допущений, которые находятся вне опровергаемой системы и которым она не соответствует»[29].

Таким образом, по крайней мере, в философии акцент с доказательства переносится на аргументацию в её широком (экзотерическом) смысле, когда объекты дискурса и средства аргументации, вообще говоря, не ограничены условиями на доказательство и не фиксированы в виде правил. Сфера аргументации – свободная дискуссия. А приёмы, свойственные дискуссии, характерны для логики не более, чем для теории аргументации.

Оговоримся, правда, что по мере совершенствования логики как основной теории норм и законов мышления, некоторое время казалось, что античные приёмы диалога (формы становления мысли, в которых на равных участвуют довод и его опровержение, тезис и антитезис) «растворятся» в алгоритмах формальной логики. Выше я уже говорил, какой представлялась эта ситуация Эверту Бету. И поначалу она представлялась так не только Бету. Однако уже Лейбниц отмечал невозможность в дискуссиях серьёзно пользоваться дедуктивной логикой. И уже в наше время выяснилось (на примере гёделевской теоремы о неполноте), что всё совершенство логических исчислений (включая и аристотелевскую силлогистику) обязано их замкнутому характеру. Многое из области действительного мышления, что входит в практику интеллектуального общения, они оставляют в стороне. Их «рафинированное мышление» неспособно удовлетворить все запросы этой практики. Чистая логическая теория доказательств пока не может (и, по-видимому, никогда не сможет) ассимилировать все практические и все когнитивные и эмоциональные предпосылки наших действий.

Вот почему в последние годы в рассуждениях о *технике мышления* вновь зазвучали античные мотивы «искусства спора и метафизики». Под вывеской «Новой риторики»[30] возвращается внимание к античной диалектике, как её определил А.Шопенгауэр: «по этимологическому значению слова – это искусство вести беседу; но так как никакая продолжительная беседа не обходится без споров, то диалектика по самой своей природе переходит в *эристику*»[31].

---

[29] *Гегель Г.В.Ф.* Наука логики. Т. 3. М., 1972. С. 13.

[30] *Perelman Ch.* Le champ de l'argumentation. P., 1970.

[31] *Шопенгауэр А.* Новые паралипомены: отдельные, но систематически изложенные мысли о разного рода предметах (1810–1860). § 100.

Таким образом, предметом теории аргументации становится изучение речевой (дискурсивной) техники мышления (техники дискурса), направленной либо на побуждение к определённым действиям, либо на согласование спорных вопросов посредством подходящих аргументов.

Нередко единственным оппонентом в дискурсе являемся и мы сами, когда мы взвешиваем (анализируем) в собственном сознании какие-либо тезисы, поставленные жизнью, и отыскиваем аргументы за них или против них. В этом случае мы испытываем тезисы на их ценность, анализируем заключения, которые можно из них извлечь, чтобы выяснить их взаимную согласованность или, напротив, их взаимную противоречивость. Мы возвращаемся здесь к искусству диалога, к сократовской майевтике или, иначе, к античной диалектике, представленной Аристотелем в его «Топике».

Однако уровень анализа теперь, конечно, иной. В частности, возможна автоматизация дискурса, чтобы пойти по пути междисциплинарных исследований «искусственного интеллекта» вообще, захватив в их орбиту и методологию диалога в форме построения логики «вопросно-ответных» систем. Отчасти начало такому пути было положено косвенным влиянием прагматики[32], которая обратила внимание на то, что основания наших рассуждений и убеждений имеют не только теоретическую подоплёку.

Стоит сказать, что и собственно логический аспект обоснования не сводится к анализу аргументов, поставляемых (допускаемых) одной лишь формальной логикой. История науки – это постоянное рождение (и зарождение) новых идей, что нередко приводит к революционным преобразованиям в дискурсе и к коллизии (противоречию) мнений. А противоречивый дискурс – это предмет анализа. Он требует рассуждений, составляющих прерогативу диалектической мысли в этимологическом значении слова «диалектика», а именно, в смысле искусства вести беседу. Это та область дискурса, которую Башляр назвал «философией нет» – методология прояснения (и решения) вопросов посредством свободного диалога. А в этой области, как кажется, нет абсолютных границ между допустимыми и недопустимыми способами рассуждений, если не иметь в виду тавтологий.

Я уже говорил немного о том, что в античности аргументация зачислялась по ведомству диалектики и риторики. Это опора спекулятивной мысли в качестве средства беседы, диалога, дискуссии. Диалектика понималась как искусство спора, риторика – как искусство

[32] См.: *Добронравов И., Финн В.* Прагматика // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967.

красноречия, «соответствующее диалектике, так как обе они касаются таких предметов, знакомство с которыми может считаться достоянием всех и каждого и которые не относятся к области какой-либо отдельной науки»[33]. Но поскольку обе означали способность находить те или иные *способы убеждения* относительно обсуждаемого предмета, естественно возникал вопрос: каковы же вообще могут быть способы убеждения и какие из них допустимы, а какие недопустимы с точки зрения определённых, например нравственных, критериев?

Уже Платон отмечает разницу между понятиями «убеждать» с помощью разумного (скажем сегодня – логически верного) довода, основанного на правилах, и понятием «внушать» с помощью доводов, обращенных к сердцу, к чувству, к интуиции с целью, как говорит Аристотель, привести в известное настроение, расположить в свою пользу, которые могут и не основываться на правилах.

Сам Аристотель идёт ещё дальше, делая различие между «техническими» и «нетехническими» средствами убеждения. К последним он относит свидетельские показания (в суде), признания, сделанные по пыткой, письменные договоры и пр. Техническими Аристотель называет такие способы убеждения, которые созданы наукой с помощью определённого метода или же такие, которые связаны исключительно с нашей речевой практикой, с дискурсом. Эти технические способы убеждения заключаются, по словам Аристотеля, в действительном или же кажущемся доказывании.

Разделение «доказывания» на *действительное* и *кажущееся* было поворотным пунктом в истории логики и аргументации. В этом отношении Аристотеля можно считать первым теоретиком, осуществившим переход от расплывчатой идеи аргументации к строгому определению понятий, к отделению «аргументации вообще», когда касаются «тех вопросов ... относительно которых у нас нет строго определённых правил»[34], от точного понятия логического доказательства. Даже в области риторики, говорит Аристотель, только доказательства существенны, поскольку «мы тогда всего больше в чём-либо убеждаемся, когда нам представляется, что что-либо доказано»[35].

Аристотель стал создателем первой научной теории доказательства, которую мы теперь, как уже говорилось выше, называем силлогистикой и которая (в несколько модифицированном виде) является неотъемлемым фрагментом современной формальной логики. При

[33] *Аристотель.* Риторика // Античные риторики. М., 1978. С. 15.
[34] Там же. С. 21.
[35] Там же. С. 17.

этом основная мысль Аристотеля заключалась в том, что всякое умозаключение, чтобы считаться «хорошим» умозаключением и, таким образом, приемлемым, должно быть *общезначимым*.

В последующих беседах мы уточним это понятие. А пока только замечу, что в смысле дедуктивной логики доказательство либо общезначимо, либо нет и, следовательно, вовсе не является доказательством. Как говорится, – третьего не дано (*tertium non datur*). Однако, коль скоро речь заходит о диспутах или об обычной речи, то следует признать вместе с Лейбницем, что «форма силлогизмов (как и вообще общезначимых форм. – *М.Н.*) мало употребляется людьми, и что она была бы слишком длинной и запутанной, для того, чтобы ею можно было серьёзно пользоваться»[36] .

Вот почему подавляющие примеры аргументации «никогда не имеют принудительной строгости хорошего доказательства. Законность аргументации это вопрос степени: она более или менее сильна... она никогда не является замкнутой: всегда можно добиться её усиления, подбирая подходящие аргументы»[37] .

Правда, и аргументируя нестрого, нам приходится следовать законам логики, подбирая аргументы таким образом, чтобы они согласовались между собой, и избегая таких ситуаций, когда каждый аргумент, более или менее правдоподобный сам по себе, оказывается в противоречии с другими.

Но чтобы судить о характере противоречий (о ***Pro*** и ***Contra***) в дискурсе, необходимо располагать знанием о средствах, позволяющих получать эти противоречия и более того – знанием о достижимости противоречия этими средствами. А это говорит о том, что *вопрос о непротиворечивости необходимо связывать с вопросом о допустимых способах аргументации*.

Конечно, появление формальной логики сильно повлияло на судьбу аргументации в её широком смысле. Отданная на откуп искусству красноречия и морали, аргументация постепенно теряла кредит доверия со стороны точной науки. Её доводы не подлежали точному анализу, а её суждения не поддавались истинностной оценке, и не могли, как казалось, стать «конститутивным элементом объективного знания» (Ch.Perelman).

Правда, аргументация всегда сохраняла статус интеллектуальной надстройки над дискурсом. Но связанная только с доводом, а не с правилом и законом, она по-прежнему служит благоприятной почвой для софистики, поскольку софистом становятся не в силу какой-то особой способности, а в силу намерения, как говорил Аристотель.

---

[36] *Лейбниц Г.В.* Новые опыты о человеческом разуме. М., 1936. С. 423.
[37] *Blanché R.* Le raisonnement. P., 1973. P. 223.

Тем не менее, уже отмечалось выше, что за последние годы, возможно в свете задач «искусственного интеллекта», отношение к проблемам аргументации несколько изменилось. Аргументация становится частью общей теории убеждения. Намечается её путь от философии и логики к психологии и теории информации. А изучение психологических механизмов убеждения может естественно влиять на выбор средств аргументации. В конечном счёте, сам по себе аргумент ничто, пока он, так или иначе, не истолкован, ведь именно человек обладает ключом к убеждающей власти аргументации[38] .

Возникает, однако, вопрос: возможно ли и как усилить эту власть? Многие защитники теории аргументации полагают, что логики (именно они!) должны отправиться на поиски новых «доказывающих средств» в философии, в обществоведении, в политике, в повседневных дискуссиях, вообще в гуманитарных сферах человеческой деятельности. И отчасти этот процесс действительно идёт путём создания новых (неклассических) логик, совокупность которых можно было бы окрестить *логикой гуманитарного знания*. Но их оформление в точную науку пока ещё очень далеко от завершения[39] .

---

38 *Grize J.-B.* Recherches sur le discours et l’argumentation. Genève. 1974; *Kapferer J.-Noêl.* Les chemains de persuasion. P., 1978.

39 Для сравнения см.: *Есенин-Вольпин А.С.* О теории диспутов и логике доверия // *Он же.* Избранное. М., 1999.

Беседа вторая. Немного из семиотики

Язык есть первая ступень
в стремлении к науке.

Фридрих Ницше

Размышляйте над речью

Упанишады

Понятийную основу любой науки
составляет сложная сеть имён...

Ю.И.Манин

2.1. Логика и язык

Некоторые считают логику наукой, некоторые искусством. Когда-то, ещё в XVII в., французские учёные Антуан Арно и Пьер Николь так и назвали свой учебник «Логика или искусство мыслить». Но с тех пор прошло много времени. И если сегодня вы возьмёте в руки хороший *современный* учебник, рекомендуемый всего лишь в качестве первоначального знакомства с предметом (например, книгу Элиота Мендельсона «Введение в математическую логику»), вам вряд ли придёт на ум говорить о логике как об искусстве.

И всё-таки противоречия здесь нет, ведь и владеть наукой, и создавать её – это тоже искусство. Вот почему оба определения логики – как науки о законах мышления или как искусства правильного (хорошего, приемлемого) умозаключения равным образом приемлемы.

Гораздо важнее для нас вопрос о том, что такое «законы мышления» и какие умозаключения (рассуждения) можно считать правильными, а какие нет. Чтобы точно ответить на этот вопрос, имея в виду его логический смысл, нам придётся изучать уже не *мышление* (это скорее предмет психологии и физиологии), а *язык*.

Известно, что главная функция языка – информационная. С помощью языка разум обретает «видимый облик». Язык – это объективированная мысль. И только в таком объективированном виде мы и можем подобраться к логической структуре нашей мысли. Правда, если мы в изучении регулятивных особенностей языка остановимся на языке естественном, нам трудно будет понять современную логику умозаключений. Умозаключающие структуры (схемы) естественного дискурса – это предмет другой теории, теории, которую в нашей предыдущей беседе мы определили как теорию аргументации. Отправной точкой этой теории является не доказательство, а дискуссия, а в дискуссии – не стилистика «языковой фразы» (предмет общей риторики[40]), а сумма аргументов диалогического дискурса, в котором эта теория видит идеальную основу для выработки объективно верных умозаключений, рассчитанных, однако, не на логику доказательства, а только на убеждение.

По сути, в теории аргументации анализируется отношение «оппонент-пропонент» («аудитория-оратор») с точки зрения существенных для этого отношения «психо-логических» механизмов мысли, характерных для различных (неформальных) типов человеческой коммуникации.

Уходя от явного психологизма теории аргументации, в логике сегодня под словом «язык» подразумевают, как правило, не естественные (разговорные) языки, а языки искусственно созданные с целью точного представления информации. Это так называемые языки специальных наук – языки математики, программирования, компьютерной (вычислительной) техники, и многие другие, в том числе и языки самой логики. Такие искусственные языки называют *формальными*. Обычно они сходны с естественными языками в принципах порождения. И те, и другие создаются как цепочки (конечные последовательности) базовых символов – письменных представителей каких-то понятий. И те, и другие имеют свой синтаксис (грамматику) и семантику. Правда, у естественных языков синтаксис и семантика богаче, чем у формальных. Зато у формальных языков они строже и адекватно приспособлены к задачам создания этих языков.

Вообще говоря, *формальный язык – это идеография*, сочетающая гибкость алфавитного и образность иконического письма. Это, по словам Бореля, «такой сокращённый язык, который делает возможным без труда вести рассуждение в общей форме и просто выражать общие правила»[41].

Как и любой естественный язык, формальный язык служит посредником между «миром идей» и «миром вещей», и практически очень важен вопрос о мере этого посредничества. Поэтому вообще взгляд на язык «от семантики» общепринят. Так, в частности, написаны школьные пособия. Даже синтаксический анализ основан в них на семантических категориях. Ведь и в науке при построении формализмов свободно пользуются терминологией из их будущих интерпретаций, то есть с самого начала используют *знаковый подход* к языку.

---

40 *Дюбуа Ж. и др.* Общая риторика. М., 1986.

41 *Борель Э.* Элементарная математика. Одесса, 1923. С. 122.

Формальное определение языка как свободной полугруппы над системой образующих любому непосвящённому покажется только затемняющим суть дела непонятным математическим жаргоном.

Не всегда, конечно, семантический подход обусловлен некой предметной необходимостью. Нередко «знаковый априоризм» вызывается естественным желанием удовлетворить рефлекторное читательское «что такое?» или предупредить прагматический вопрос «Зачем?». Но, пожалуй, чаще в основе знакового подхода к языку лежат более глубокие соображения, вынесенные из логического анализа информационных возможностей языковых систем.

Главные из этих соображений касаются проблем, неразрешимых чисто формальными средствами. Но есть и другие соображения, теоретически не менее значимые. Например, философская проблема истины и семиотическая проблема значения хотя и не совпадают, но родственны. Обе указывают на существенную гносеологическую роль семантики, связывая типы возможных моделей формального языка не только с формальными правилами его порождения (с его синтаксисом), но и с *абстракциями*, лежащими в основе этих правил (с семантикой синтаксиса) или, идя ещё дальше, с абстракциями теорий (с системами аксиом), для которых тот или иной формальный язык предназначен.

Эти проблемы кажутся школьными в наше время – через два с лишним тысячелетия после их первой постановки. И о них можно было бы и не упоминать, если бы они теперь не числились по разным ведомствам. Одна по ведомству философии, другая по ведомству семиотики и логики.

Было время, когда логику перестали считать теорией, отождествляя её с формальным языком, а язык – с игрой по формальным правилам. При таком толковании и логика, и язык теряли гносеологический смысл. Но вопрос о «внутренней семантике» формального языка всё же остался. Постепенно он перерос в проблему множественности логических систем. На первых порах именно семантическим анализом была подорвана доктрина о единых (всеобщих) правилах мышления, открылась возможность развивать различные системы логики для различных целей, в результате чего логика из «чёрно-белой» стала «цветной».

Сегодня, правда, чисто синтаксические методы служат этим целям не менее успешно. Ведь, в конечном счете, многое определяется не только семантическим богатством языка, но и его точностью, его способностью к однозначному отображению действительности. Не случайно же именно логистика с её необычным формальным синтаксисом пробила брешь в традиционных представлениях о единственности логики, явилась, так сказать, первой теорией экспериментирующей над полем логических понятий.

А это поле логики – абстрактно. Это понятия, суждения, умозаключения. Именно они выступают как *значения* выражений логического языка[42]. И первая абстракция логики состоит в том, чтобы отвлечься от того их содержания, которое является посторонним для логической правильности акта умозаключения, представить логическую реальность в виде чисто знаковой реальности. Поэтому знакомство с формальным языком логики начинается с общих понятий, принадлежащих не логике, а семиотике – науке о *знаковых системах*, в которой уточняется само слово «значение».

2.2. Знак и знаковая ситуация

Это сопряжённые понятия. По-видимому, славянское слово «знак» связано с актом понимания и происходит от глаголов «знать», «дать понять» или «узнавать». Оно также понимается как рисунок или (иногда) как символическое обозначение чего-либо, признак чего-либо или свидетельство о чём-либо.

Однако замечу сразу, что это в формальных языках (в логической лексике) термин «знак» обычно используется с тем же значением, что и слово «символ». Отсюда известное определение – «символическая логика». Но в семиотическом контексте эти термины отнюдь не синонимичны. Чтобы стать символом знак должен стать *тропом*, например, получить черты аллегории. Не случайно символическим (символизмом) назвали искусство, способное внушать то, что в сказанном (изображённом) нарочито умалчивается, в чём скрытое значение мысли (образа), и как бы «мир невидимый» позади «мира явленного»[43].

Однако здесь мы не станем доискиваться лингвистических корней этих терминов, а просто скажем, что знак – это любой предмет, который в актах коммуникации (общения) выполняет *референциальную функцию*, а именно, указывает на какой-то другой предмет, обычно отличный от него самого[44]. То, на что указывает знак, называют его (им) обозначаемым. В результате мы получаем пару <знак – обозначаемое >. Такую пару называют *знаковой ситуацией*.

---

42 Собственно, в современной логической лексике эти выражения почти исчезли и заменились терминами «терм», «высказывание» и «вывод».

43 Об этом, например: *Иванов Вяч.* Лик и личины России. Эстетика и литературная теория. М., 1995; *Флоренский П.А.* Иконостас. М. 1995; *Аверинцев С.С.* Символ // Краткая литературная энциклопедия. Т. 6. М., 1971.

44 Подробный семиотический анализ основ знаковой теории см. в кн.: Семиотика. М., 1983.

Знаковая ситуация это явление не только семиотическое, но также отчасти психологическое и прагматическое. Она обусловлена не только принятым (абстрактно) знаковым отображением, но и конкретным «вхождением» в определённое положение вещей, в котором это отображение используется. Именно в виду психологического и прагматического характера в знаковой ситуации может индуцироваться *сужение* или *продолжение* (в их теоретико-множественном смысле) того знакового отображения, на основе которого эта ситуация возникла. Отсюда, с одной стороны, возможная «мистика знака» и знаковой ситуации, а с другой её аналогия с *ситуацией проблемной*, когда обнаруживается не только встреча с проблемой, но и осознание проблемы, и интеллектуальный настрой на её решение.

Разумеется, элементами знаковых ситуаций могут быть произвольные объекты – материальные или идеальные, вещи или идеи. Для восприятия ситуации как знаковой это не играет роли. Но для точного и исчерпывающего задания знакового отображения (референциальной функции) вопрос о характере названных элементов является, конечно, важным. С этим связан вопрос об объёмной определённости тех множеств, из которых черпаются значения знаков, а, следовательно, и вопрос об определённости самих знаковых отображений.

В формальных языках все условия порождения знаковых ситуаций строго фиксируются. В естественных языках, напротив, знаковые отображения строятся (создаются) обычно на открытых или на объёмно неопределённых («размытых») множествах и поэтому сами являются объёмно неопределёнными, в чём, между прочим, один из источников парадоксов или софизмов.

Как уже говорилось выше, в естественных языках знаковая ситуация – это явление не только лингвистическое, но одновременно и психологическое, и прагматическое. Поэтому она не всегда определяется общепринятыми нормами. При известных обстоятельствах знаковое отображение может изменяться в зависимости от этих обстоятельств. Такие процессы в их естественной эволюции приводят к замене одних знаковых отображений другими, – к изменению узуса. Иначе говоря, в отличие от формальных языков, в языках естественных знаковые отображения обладают «творческой активностью». Они – своего рода *герменевтика языка*.

Вместе с тем, говоря о естественных языках, настаивать на абсолютной условности отношения «обозначающее – обозначаемое» было бы серьёзной ошибкой. Припомним диалог Алисы и Шалтая-Болтая:

Когда я употребляю какое-нибудь слово, – сказал Шалтай-Болтай довольно презрительно, – оно обозначает то, что я хочу, чтобы оно обозначало. Не больше и не меньше...

Вопрос в том, – сказала Алиса, – можете ли вы заставить слова выражать такие различные вещи?

Вопрос в том, – сказал Шалтай-Болтай, – кто хозяин: я или моё слово? Вот и всё.

Позиция Шалтая, кстати, очень древняя позиция, восходит к договорной концепции языка. Она уместна, хотя и не без оговорок, по отношению к знакам естественных языков, но отнюдь не по отношению ко всем знакам. Вопрос, однако, в том, что если знаковая ситуация договорная, то договор всё-таки должен неукоснительно соблюдаться во избежание путаницы и ошибок. Но если знаковая ситуация не договорная (не конвенциональная), то нам, по-видимому, и в голову не придёт рассуждать подобно Шалтаю-Болтаю. Например, в том, что тучи являются знаком дождя нет никакой условности (конвенциональности). И разве не является для нас следствие знаком существования причины и наоборот?

Поэтому мы не станем выделять «условность» (конвенциональность) в качестве одной из основных особенностей знаков и знаковых ситуаций. Но вот способность знака быть «представителем» обозначаемого, мы выделим как основную.

2.3. Предметное и смысловое значение знака

Структура знаковой ситуации, как мы её пока описали, сводится к паре <знак–обозначаемое>. «Обозначаемое» довольно громоздкое слово. Поэтому заменим его более коротким – «значение». Ответ на вопрос, «что такое значение?» поможет нам лучше понять структуру знаковой ситуации.

Начнём с привычной для нас знаковой ситуации, в которой знаком является слово «Луна». Это слово вызывает в каждом из нас представление или мысль о небесном теле, спутнике нашей родной планеты. Мы даже можем при этом вспомнить, что Луна – ближайшее к Земле небесное тело, что расстояние до неё всего 384 тысячи километров, что на Луне уже побывал человек и т.п. В этом акте мысленной ассоциации знака и его значения отчётливо различаются три элемента:

Реальный предмет (объект), названный словом «Луна».

Представление или мысль об этом предмете – более или менее полная информация о нём. Например, всё то, что мы можем прочитать о Луне в учебнике астрономии или в энциклопедии. В традиционных терминах это – понятие.

Наконец, само слово «Луна».

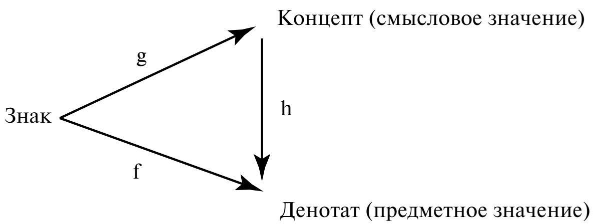
Третье мы, естественно, называем *знаком*.

Однако на этом анализ не заканчивается. Второй элемент пары <знак; обозначаемое> естественно раздваивается на предмет, на который знак указывает, назовём его *предметным значением* (или, применяя более учёное выражение, – *денотатом*) знака и на представление или мысль об этом предметном значении, на информацию о нём. Эту информацию называют *смысловым значением* знака, или его *концептом*. Смысл (концепт) – это суть знака.

В результате первоначально простое отношение <знак–обозначаемое> преобразовалось в две пары: <знак–денотат> и <знак–концепт>. Отношения, которые они представляют, очевидно, различны. Первое говорит о названии (знаковом представлении) некой сущности. Второе – о смысловой или концептуальной (понятийной) характеристике этой сущности, о некоторых её релевантных признаках. Разумеется, не исключается случай, когда разные знаки указывают на один и тот же денотат. Это знакомый нам по естественному языку случай *знаковой синонимии*. Не исключается также и случай *концептуальной синонимии*. В этом случае разные концепты характеризуют (естественно по-разному) один и тот же денотат. Так, концепты «виконт де Гийераг» и «автор Португальских писем» по-разному характеризуют одного и того же человека по имени «Габриель-Жозеф де Лавернь». Знаковая синонимия считается сильной, а концептуальная – слабой. Основание, почему это так, мы, возможно, рассмотрим позднее.

2.4. Семиотический треугольник

А пока воспользуемся коммутативной диаграммой в виде треугольника, чтобы изобразить наглядно отношения между знаком, концептом и денотатом:



Этот треугольник обычно называют *семиотическим треугольником* (или треугольником Фреге).

Стрелки на диаграмме указывают направление движения мысли – от знака к концепту и от концепта к денотату. Это означает, что предметное значение знака, вообще говоря, определяют как функцию его смысла. Правда, иногда возможен и прямой путь от знака к его денотату. В свою очередь, движение от денотата к концепту порождает вопрос: «Что это такое?».

Повторю, что концепт – это информация (смысл, понятие, идея, представление) однозначно сопоставляемая знаку некоторой функцией g. А функцией h, в свою очередь, однозначно определяется денотат в качестве образа концепта (или как образ функции $h \times g = f$).

Эта идея «триединства» элементов знаковой ситуации в общих чертах восходит к Аристотелю и стоикам. Применительно к формальным языкам логики она была возрождена немецким логиком Готлобом Фреге.

Замечу, что в обеих диаграммах стрелки означают морфизмы (отображения), причём как g, так и h (и, соответственно, $g \times h$) не обязательно биективны, то есть, как уже отмечалось выше, не исключается возможность слабой или сильной синонимии. Зато *омонимия* (когда один и тот же знак имеет разные предметные значения) естественно исключается. Это очень важно, поскольку омонимия (это знал уже Аристотель) нередко служит источником логических ошибок.

Более глубокий вопрос, являются ли указанные выше морфизмы отображениями в строгом смысле? Усилия Фреге были направлены на то, чтобы оправдать их функциональный характер. Для искусственных языков такое оправдание тривиально. Но и для практики естественных языков оно отчасти возможно, поскольку тут многое зависит от конкретных «вхождений» в положение вещей, от контекста, в котором знаковая ситуация уточняется. В этом случае прямое движение мысли от знака к его предметному значению (денотату) всегда заменяется окольным путём через концептуальное значение (смысл) знака, так что в результате предметное значение на самом деле оказывается *функцией понимания* предмета мысли. Таким образом, в знаковой ситуации предмет участвует не «сам по себе», а по мере смысловой значимости его описания, то есть всегда как некая *абстракция*.

Всё это имеет очень важные последствия. Так, мы не всегда можем быть уверены, что различные концептуальные значения, которые мы готовы рассматривать как синонимы, приведут нас к «одному и тому же» денотату или вообще к какому-нибудь денотату. Дело в том, что денотаты знаков мы относим обычно к реальному миру, то есть к тому миру, в котором мы живём. А концепты в состоянии порождать воображаемые миры. Их называют в логике *возможными мирами*. Для всех естественных языков характерны такие вырожденные ситуации, когда у знака может отсутствовать реальный денотат (Баба Яга, Единорог, Золотая гора, нынешний король Франции), но имеется денотат, принадлежащий возможному миру. И этот возможный мир не обязательно будет (или должен быть) сказочным. Он может быть создан контекстом, в котором используется тот или иной язык, или всем полем понятий, от которых зависит расшифровка (истолкование) концептуальных значений знаков.

Возможна и симметричная ситуация, когда у знака отсутствует концепт. Так, собственные имена, как правило, не имеют концептов. Обратимся снова к знаменитой сказке Льюиса Кэрролла:

> Меня зовут Алиса,
> Довольно глупое имя. Что обозначает это имя?
> А разве имя должно что-нибудь обозначать? – с сомнением спросила Алиса.
> Конечно! – сказал Шалтай-Болтай с коротким смешком. – Моё имя обозначает мои качества. И довольно недурные качества, могу сказать. С таким именем, как у тебя, девочка, можно быть без всяких качеств...

2.5. Знаковые системы и три аспекта их изучения

Выше мы познакомились с понятиями «знак» и «знаковая ситуация». Мы их скорее описали, чем строго определили. Аналогично мы поступим и с понятием «знаковая система». И не потому, что последнее (строгое определение) невозможно, а просто потому, что строгое определение понятия «знаковая система» предполагает привлечение таких средств, которыми мы ещё не владеем. В последующих беседах мы всё ближе будем подходить к точному пониманию того, что такое знаковая система. То же самое можно сказать и об аспектах её изучения[45] .

Начнём пока с замечания, что хотя знаки и знаковые системы могут создаваться произвольным образом, их ценность в развитии цивилизации и культуры связана с их общественным и *систематическим* употреблением, с регулярностью их использования. И это понятно, поскольку и знаки и знаковые ситуации необходимы в первую

45 Однако стоит учесть, что у этой книги, вообще говоря, другая задача. Поэтому для краткого, но более полного знакомства с темой этой беседы я настоятельно рекомендую ст.: Прагматика, Семантика и Семиотика // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967; Сигнифика // Там же. Т. 5. М. 1970; а также брошюру: *Шрейдер Ю.А.* Логика знаковых систем. М., 1974.

очередь для закрепления результатов познания, для передачи накопленной информации, для обеспечения преемственности исторического опыта. Английский философ Томас Гоббс отдельные изолированные знаки (вроде «узелков на память») даже не считал знаками, называя их только метками (или ярлыками), пригодными для упражнения мышления, для личного опыта, но непригодными для информационного общения людей.

В самом деле, любое слово, произнесённое само по себе, немедленно вызывает вопрос, зачем и для чего оно сказано. Если же это слово рассматривается в составе предложения, его смысл обычно нам понятен без дополнительных разъяснений. Но предложение – это уже *система* слов-знаков, организованная по определённым правилам.

Итак, *знаковая система* – это система знаков, связанных между собой некоторым регулярным образом так, чтобы знаки могли служить средством фиксации, передачи и хранения информации. Или совсем коротко – знаковая система это множество знаков с определёнными на них (или для них) отношениями.

Примерами знаковых систем являются все естественные языки, хорошо нам знакомые по опыту своего родного языка, а также языки искусственные: формализованные языки математики, логики, программирования, информационно-поиковые языки, язык химии и пр.

2.6. О семантике

Любую знаковую систему можно анализировать (изучать):

Во-первых, *в плане содержания*, то есть с точки зрения того, что говорится в её знаковых текстах, что сообщается с помощью её знаков, о ком или о чём в них говорится, какую информацию с помощью знаковой системы можно передать или в передаче какой информации она может служить посредником. План содержания называется *семантическим*, а соответствующий раздел семиотики, изучающий семантический план знаковых систем – *семантикой.*

Например, ономатология, отрасль языкознания, которая занимается изучением концептуального содержания собственных имён, изучает их именно в плане семантическом, выясняя одновременно историю их происхождения и дальнейшую их эволюцию. Чтобы там ни говорил Шалтай-Болтай, а у древних народов имя служило не просто меткой, но выражало некие магические (сакральные) характеристики его носителя. Не существовало имён без концептуальных значений. На эту глубинную связь имени с характером человека, как отголоском древнего обычая «именования», намекает Антон Павлович Чехов в рассказе «За яблочки»: «Если бы сей свет не был сим светом, а называл бы вещи настоящим их именем, то Трифона Семёновича звали бы не Трифоном Семёновичем, а иначе». Об этом же (о связи имени и личности) писал и Павел Флоренский.

Семантика знака предполагает, как правило, его «погружённость» в некоторый контекст, то есть в некоторую языковую среду (окружение), которая окончательно (но однозначно ли?) определяет смысл и денотат знака. Например, в предложении «человек идёт» глагол «идёт» означает «шагание», а в предложении «весна идёт» – наступление некоторого события. Ещё одно изменение значения даёт контекст «жизнь идёт».

Однако *принцип контекста*, согласно которому знаки имеют смысл только в контексте, в частности, в контексте предложений, на чём настаивал Фреге, требует некоторого уточнения. Понимаемый радикально, он как будто бы говорит о том, что знак «сам по себе» (отдельно взятый) не имеет никакого смысла. Эта, как мы уже видели выше, позиция Шалтая-Болтая. Она хорошо согласуется с практикой формальных языков. Но она противоречит естественной лингвистической практике, когда посредством *одной и той же* лексики мы создаём новые контексты и при этом нисколько не затрудняемся в понимании новых предложений.

Кажется, что радикализм принципа контекста умаляет «продуктивную способность» языка. Если знаки, в частности слова, *a priori* не имеют никакого смысла, то не ясно, каким образом можно было бы их использовать (в принципе неограниченное множество раз) в совершенно новых контекстах.

Последнее нетрудно объяснить, если предположить, что в семантике знаков отражаются, как правило, два плана их реального значения – *операциональный* план, связанный с их контекстуальным употреблением, с их «материальным» вхождением в тот или иной языковый текст (на чём настаивал Фреге); и план *эйдический*, связанный с интеллигибельным характером знаков, зависимый не от языковой структуры данного текста, а от структуры словаря и, следовательно, априорный по отношению к любому данному употреблению знака. Это своего рода обобщённый образ (форма) всех возможных его употреблений.

Конечно, мы можем определить значение слова по факту его вхождения в структуру фразы. Но обычно это не будет полным его значением. Полное значение предполагает «технологию рождения» с априорным значением слова «самого по себе». Именно таким эйдическим планом и обусловлена возможность, говорить *об одном и том же* в различных контекстах.

Хотя границы указанных планов не для всех понятий легко обозримы, они всё же есть. Примером может служить понятие длины. Оно ощутимо имеет и операциональный, и эйдический план. Первый представлен его метрическим значением, второй – его определением через абстракцию.

Операциональную семантику естественно назвать семантикой *контекстно-детерминированной*, а эйдическую – *контекстно-свободной*, не претендуя на связь этих названий с аналогичными в математической лингвистике. Важно лишь подчеркнуть ситуацию, которая в логической семантике обычно игнорируется.

Очевидно, что контекстно-детерминированная семантика по существу прагматична, она связана с целевой функцией, с условиями, определяющими употребление знаковых выражений. Напротив, контекстно-свободная семантика, не обременённая какими-либо целевыми функциями и условиями момента, играет регулятивную роль по отношению к способам употребления понятия. Она канонизирует операциональный план, определяет допустимые его границы, хотя необязательно (за исключением, быть может, формализованных языков), чтобы контекстно-детерминированная семантика понятия была всецело подчинена его контекстно-свободной семантике. Известно, что можно употреблять понятие в соответствии с его идеей, а можно профанировать эту идею, употребляя понятие «не надлежащим образом». Исключение эйдического плана из семантики понятия привело бы к разрушению диахронии языка, к лексическому релятивизму. Между тем, характерной семантической особенностью знаковых систем является систематичность обозначений, повторяемость (воспроизводимость) знаковых ситуаций. По способности описания, выражения, детализации действительности судят о выразительных возможностях знаковых систем, об их семантической силе.

2.7. О синтактике

Знаковые системы можно изучать не только в плане содержания, но и *в плане выражения*, то есть с точки зрения того, «как» говорится «о чём» говорится, какими средствами представляется то, о чём говорится. План выражения называют синтаксическим, а соответствующий раздел семиотики – *синтактикой*. Синтактика изучает вопросы, связанные с правильностью построения выражений языка (его слов, предложений, текстов) и, соответственно формулирует правила (законы) согласно которым строятся эти выражения. Синтактика не отвечает за смысл выражений. Вполне возможны правильно построенные выражения, не имеющие смысла. Но понятно, что все осмысленные выражения должны быть правильно построены.

2.8. О прагматике

Наконец, в-третьих, знаковые системы можно изучать *в плане восприятия*, то есть с точки зрения возможного пользователя знаковой системы – с точки зрения отправителя сообщений (их передачи) средствами той или иной знаковой системы или с точки зрения получателя этих сообщений (адресата). План восприятия называют прагматическим, а соответствующий раздел семиотики – *прагматикой*. Прагматика – это самый субъективный план семиотики. Способность знаковой системы (к примеру, естественного языка) играть прагматическую роль, особенно существенна для теории аргументации. Речь адвоката, прокурора, свидетелей и подсудимого имеют, как правило, прагматическую направленность. Только в прагматическом аспекте и с учётом этого аспекта знаковая система выступает как проявление общественной или внутренней (личной) жизни индивидуума или социальных групп со всеми психологическими особенностями, сопровождающими её использование. При этом в прагматическом поле знаковой системы действуют наравне как её «пользователь», так и её «создатель». По образному выражению голландского философа и математика Маннури, даже самая абстрактная математическая проблема не может быть сформулирована без привлечения живого Адама, который даёт имена вещам.

* * *

Итак, в первой беседе мы сказали, что цель логики, как и любой другой науки, – истина. Правда, на известный теоретический вопрос «Что есть истина?» ответа общепринятого нет. Легче с ответом на прагматический вопрос, что мы считаем или что мы привыкли считать истиной. На этот вопрос ответ дал уже Аристотель: истину высказывает тот, кто считает соединённое соединённым, а разделённое разделённым. Другими словами, истина «консервируется» в наших суждениях (высказываниях) о фактах окружающей нас действительности, когда мы эти факты признаём, а не опровергаем. Таким образом, действительность строится «для нас» из фактов. И это дало повод австрийскому философу Людвигу Витгенштейну сказать, что мы создаём для себя образы фактов. Поэтому мир в нашем сознании – это совокупность фактов, а не вещей. Но наши образы фактов не обязательно соответствуют самим фактам. Зато они всегда содержат некий инвариант, который не зависит от истин, представленных образами факта. Этот инвариант – *логическая форма* факта. Наша ближайшая задача (в следующем очерке) подойти к понятию «логическая форма» с точки зрения тех представлений о синтактике и семантике, с которыми мы познакомились выше.

Беседа третья. Высказывания и их алгебра

> Во всех случаях, когда природа вопроса допускает безопасное проведение процесса мышления механически, следует построить язык, по возможности опирающийся на механические принципы.
>
> *Дж.Ст.Милль*

3.1. Язык логики

Для желающих подробно ознакомиться с понятием «язык логики» существует небольшая, но ёмкая книжечка с одноимённым названием[46]. В этой беседе я затрону лишь малую и едва ли не самую скромную часть того, что читатель найдёт в указанной выше книге. Я буду говорить о самой простой части логического языка вообще. Однако замечу, что обольщаться этой простотой не следует. В известном смысле она столь же обманчива, как и доказательство того, что $2 \times 2 = 4$. И в том, и в другом случае требуется обращение к некоторой теории.

Поэтому первой нашей целью будет знакомство с логикой как теорией. Эта задача слишком обширна, чтобы её можно было разрешить в кратком изложении. Так что основная работа – это самостоятельное изучение логики по монографиям с более глубоким изложением предмета. А задача моих бесед дать определённый ориентир в этой самостоятельной работе.

На вопрос: «Что такое логика?» я уже ответил предварительно в нашей первой беседе. Там мы отделили логику от аргументации как часть от целого. Мы пришли к тому, что можно определить логику как науку о доказательстве. С этого именно и начинал Аристотель, говоря, что в логике «исследовать должно доказательство и что это – дело доказывающей науки»[47].

Вообще говоря, на поставленный выше вопрос ответы даются разные, и, соответственно, по-разному пишутся учебники. Не будем вопрошать их авторов, и сами ответим ещё раз так:

---

46 *Фрейденталь Х.* Язык логики. М., 1969.

47 *Аристотель.* Аналитики. М., 1952. С. 9.

Логика – это наука, помогающая решать некоторые интеллектуальные задачи на доказательство. Знание логики помогает нам построить (провести, осуществить) доказательство, если для этого имеются достаточные предпосылки.

Ключевое слово здесь «доказательство». А что же такое доказательство?

Ответ на этот вопрос по существу такой же, как и на первый. Мы должны это выяснить в процессе изучения логики. И наша главная цель – наметить логический подход к определению понятия «доказательство».

Говоря неформально и нестрого, под доказательством обычно понимают необходимую связь суждений (высказываний) в рассуждениях (умозаключениях), принудительная убедительность («общезначимость») которых вытекает (следует) только из *формы* этой связи безотносительно к тому, будут ли эти суждения истинны или ложны. И уж совсем неформально: «доказательство – это рассуждение, которое делает нас умнее»[48].

Но логический (строгий) подход к понятию «доказательство» начинается с построения особого языка, с помощью которого достигается необходимая строгость в определении понятий. Язык логики – это сокращённый язык, как и язык математики. В нём высказывания изображаются так, как в алгебре изображают числа, оставляя в известном смысле свободной их интерпретацию. Например, мы говорим: «высказывание p» вместо высказывание «2 + 2 = 4». Иными словами, элементами логического языка являются определённого вида знаки (символы), а весь язык в целом представляет собой знаковую систему. И поскольку это так, то для начала полезно пояснить некоторые основные элементы логического языка.

3.2. Высказывания

Выше мы сказали, что логика это теория. Но теория – это всегда некоторая совокупность предложений, в которых сообщается (передаётся) содержание этой теории. Поэтому остановимся на слове предложение. Значение этого слова знакомо, конечно, всем. Предложение – это основная синтаксическая единица языка, средство формирования и сообщения мысли. В обычной речи, в науке, в любой сфере деятельности имеют дело с предложениями. По существу, в предложениях выражается всё содержание нашего знания. Предложения выполняют:

[48] *Манин Ю.И.* Доказуемое и недоказуемое. М., 1979. С. 57.

Во-первых, *коммуникативную* функцию, передавая информацию о событиях нашей внешней и внутренней жизни.

Во-вторых, *прагматическую* функцию, оказывая речевое воздействие на слушателя или читателя.

В-третьих, *номинативную* функцию, указывая на определённого рода ситуацию или событие.

Наконец, в предложениях фиксируются *синтаксические связи*, отражающие формальный строй нашей мысли.

В соответствии с этим разделением функций (целей) предложения делятся на восклицательные, вопросительные, информационно-повествовательные предложения и пр.

Логика не могла пройти мимо этой лингвистической стороны, прежде всего потому, что сама она была задумана как исчисление мыслей, а мысль, как известно, выражается в языке с помощью предложений. Поэтому для начала она постаралась выбрать из всевозможных типов предложений и синтаксических связей предложений те, которые могли послужить основой теории, удовлетворяющей критериям приемлемой для неё строгости.

Так возникла *логика высказываний* – теория, в которой синтаксические особенности предложений строго соответствуют их семантическому смыслу, в отвлечении от тех привходящих обстоятельств, которые вносятся в нашу мысль любым её внелогическим содержанием. При этом термин «предложение» был заменён термином «высказывание». Это произошло не случайно, а потому, что из необозримого мира предложений логика, прежде всего, позаимствовала только те, которым вполне осмысленно можно было приписать оценку «истинно» или оценку «ложь». Такие предложения и были названы *высказываниями*, а названные их оценки – *истинностными значениями* высказываний.

Позднее, из прагматических соображений, стали рассматривать и отношения говорящего к содержанию сказанного (высказанной мысли) посредством выражения модальности сказанного, что обычно сопряжено с психологическим состоянием сомнения, знания, убеждённости или веры. Высказывания с таким модальным акцентом получили название *суждений*[49] . Как это определил Лейбниц, называют «суждением высказывание, произносимое на основании некоторого знания дела»[50] .

---

[49] За краткой справкой отсылаю к статье «Суждение» // Философская энциклопедия. Т. 5. М., 1970; или: Философский энциклопедический словарь. М., 1989. А за подробным изложением к кн.: *Чёрч А.* Введение в математическую логику. Т. 1. М., 1960. Введение.

[50] *Лейбниц Г.В.* Новые опыты о человеческом разуме. М., 1936. С. 403.

Однако остановимся на предложениях, о которых можно сказать, что они истинны или что они ложны. Согласно обычаю, мы назвали такие предложения высказываниями, а теорию, где высказывания являются главными объектами изучения и рассматриваются только с этой точки зрения – логикой высказываний.

Так как от смыслового содержания высказываний в этой логике отвлекаются, знаковая ситуация здесь упрощается. Высказывания рассматриваются как знаки всего двух объектов – истины или лжи. Это их предметные значения. И нетрудно понять, что в такой ситуации всякое истинное высказывание ничем не отличается от любого другого истинного высказывания, а всякое ложное – от любого другого ложного. Таким образом, истину и ложь можно принять как самостоятельные единственные объекты нашей логической теории. Иначе говоря, если мы ограничим класс всех высказываний всего двумя, то логику высказываний можно будет представить как совокупность логических операций над двумя объектами – «истина» и «ложь». В 1927 г. русский математик И.И.Жегалкин так и поступил. Он показал, как, применяя этот подход, можно представить логику в виде арифметической теории вычетов по модулю два[51] .

Мы, однако, имея в виду самое общее толкование логики, ограничимся традиционным подходом. Мы примем абстракцию от внешнего содержания высказываний (от той информации, которую они сообщают), но сохраним в нашей теории потенциальную возможность его присутствия посредством подходящего истолкования символов языка. С этой целью вместо самих конкретных высказываний (как это делается в школьной грамматике) мы введём для них неопределённые имена (параметры), а истину и ложь будем считать предметными значениями этих имён. Тогда основным классом объектов (универсумом) нашей теории будет класс имён всех возможных высказываний, а графика имён позволит нам отличать одно высказывание от другого. Это обычная практика построения теории, ведь в любой теории мы имеем дело не с самими объектами, а как раз с именами объектов, которые в ней изучаются.

Разумеется, поименовать изучаемые объекты, присвоить каждому из них имя не всегда возможно, если объектов неограниченно много. Но всегда можно задать некоторое условие на *принцип именования*, при соблюдении которого можно с уверенностью сказать, что каждый объект нашей теории имеет своё собственное (личное) имя. Например, можно в качестве имён для высказываний выбрать буквы какого-нибудь алфавита и использовать натуральные числа как индек-

[51] *Жегалкин И.И.* О технике вычислений в символической логике // Математический сб. Т. 34. Вып. 1. М., 1927.

сы, если букв алфавита для записи высказываний не будет хватать, или, если требуется различить одну и ту же букву алфавита. Потенциально бесконечное множество индексов и гарантирует необходимое нам множество имён.

Конечно, в силу того, что мы абстрагировались от содержания высказываний, мы, вообще говоря, не можем сказать, какое из двух значений является предметным значением высказывания, представленного тем или другим именем. Ведь во второй нашей беседе истину и ложь мы условились считать функцией смысла, а смысловых значений высказываний в нашей теории нет. Поэтому, вообще говоря, мы оставим за собой право приписывать именам высказываний истинностные значения по нашему произволу в зависимости от контекста или решаемой задачи.

3.3. Логика высказываний как абстрактная теория

Построение теории начнём с перечня её *исходных объектов*. Такими объектами мы будем считать высказывания, которые в естественном языке представимы простыми (бессоюзными) предложениями. Для имён таких высказываний мы выберем малые (строчные) буквы латинского алфавита: p, q, r, ... и пр. Мы назовём их *пропозициональными буквами*. Если латинских букв не будет хватать, мы снабдим уже известные буквы индексами, как условились выше. Мы будем считать, что каждая малая латинская буква обозначает в точности одно простое (элементарное) высказывание, а две разные буквы обозначают, вообще говоря, разные высказывания. В духе упомянутой выше арифметизации мы условимся обозначать имя истины цифрой 1, а имя лжи – цифрой 0.

Следующий шаг в построении нашей теории очевиден. Необходимо расширить класс высказываний аналогично тому, как это делается в естественном языке. Надо научиться строить сложные высказывания из простых.

Известно, что в естественном языке сложные предложения составляются из простых посредством сочинительных союзов, подчинительных союзов, противительных союзов или интонации. В сложносочинённых предложениях их простые составляющие равноправны, а в сложноподчинённых – нет. Для логики первый вариант связи предпочтительней, поскольку все её простые высказывания равноправны – одно ничем не лучше и не хуже другого. Поэтому для построения сложных высказываний логика использует только сочинительные союзы[52].

[52] Попытка античных стоиков ассимилировать в логике высказываний и подчинительные союзы успеха не имела.

3.4. О предметном языке и метаязыке

Прежде чем рассказывать о том, как составляются сложные высказывания из простых, заметим, что всякое рассуждение о предмете исследования, будь то логика или арифметика, или любая другая дисциплина, уже предполагает некоторое знакомство с логикой или подсознательное её использование в виде так называемой «естественной логики». Об этом я сказал ещё в первой беседе. Имея это в виду, мы с самого начала примем разделение логики на ту логику, которая будет непосредственным предметом нашего изучения (назовём её *символической логикой*, или ещё *предметной логикой*) и ту, которую мы будем считать нашей естественной логикой и с помощью которой мы будем беседовать о символической логике.

Это очень важное разделение логик. Оно влечёт за собой и разделение языков, которыми обычно пользуются при разговоре или записи всех наших понятийных средств.

Заметим, что для построения логики как предметной теории недостаточно абстрагироваться только от некоторых особенностей естественного языка. Мы ведь хотим посредством этой теории получить возможность умозаключать формально. А это предполагает возможность решать проблему вывода следствий из посылок при помощи некоторых механических приёмов (действий над записями, напоминающими алгоритм).

Иначе говоря, мы хотим заменить *процесс рассуждения процессом вычисления*. А для этого необходимо уметь записывать содержание логических выражений на подходящем для этого точно построенном языке, то есть на таком языке, который был бы свободен не только от смысловых и предметных значений, сопровождающих слова и предложения естественного языка, но и вообще от какихлибо значений. Такой язык обычно называют *неинтерпретированным формальным языком*[53] .

[53] Разумеется, неинтерпретированный язык это только инструмент для решения задач на доказательство. Доказывать же нам надо тезисы (и теоремы), которые обладают и смыслом и значением. Следовательно, в конечной цели мы хотим, чтобы логическое исчисление и его формальный язык о чем-то говорили, что-то описывали (могли служить информационным языком). Поэтому, если первым актом (в процессе построения) является абстракция от его смысловой структуры, то дальнейшим актом (в процессе применения) является наполнение его содержанием, но имеющем уже чисто логический смысл.

Ясно, что если объектом изучения является ещё не интерпретированный формальный язык, то для каких-либо суждений о нём недостаточно самого этого языка. Ведь мы, конечно, хотим, чтобы язык нам о чём-то говорил, что-то описывал, что-то сообщал. Например, мы хотели бы знать, какие из записей на этом языке представляются правильными, а какие нет, или какие из правильных записей представляют собой доказуемые тезисы (теоремы), и что вообще считать доказательством в этом формальном языке.

Значит, прежде чем строить формальный язык, необходимо сказать несколько слов о языке, которым мы будем пользоваться как средством для построения и объяснения всех особенностей формального языка. Говоря иначе, логический язык нам необходимо представить как бы в двух ипостасях. Один будет чисто формальным и строго построенным языком. Он будет собственным предметом нашего изучения, и потому мы назовём его *языком-объектом* или *предметным языком*. Другой язык будет состоять из языка-объекта, некоторых дополнительных знаков, не входящих в язык-объект, и обычного естественного языка. В отличие от формального, это будет содержательный язык. По существу это *язык исследователя*. Его обычно называют *метаязыком*.

Описывать в подробностях метаязык нет необходимости. Он будет вводиться по мере надобности вместе с построением языка-объекта и его использование обычно понятно из контекста. Но иногда я буду оговаривать особые случаи его применения.

В частности, уже сейчас отметим, что в метаязыке для обозначения (в качестве имён) высказываний, помимо строчных букв латинского алфавита, мы будем использовать строчные буквы греческого алфавита: α, β, γ, ... В чём именно разница этих обозначений, я скажу позже.

А пока обратим внимание на два других важных знака метаязыка. Оба они обозначают глагол «следует», но только при разных его смыслах.

Первый смысл глагола «следует» назовём *синтаксическим*, а представляющий его знак запишем так «|-». Он ставится между высказываниями, которые записываются слева или справа от этого знака. Высказывания слева от знака «|-» называют *посылками*, а высказывания справа от него – *заключением*. К примеру, в записи $\alpha \vdash \beta$ посылкой служит высказывание, поименованное буквой α, а заключением высказывание, поименованное буквой β. При этом всю запись обычно читают как утверждение: «из α следует β». Не исключено, что посылок или заключения может не быть вовсе или может быть только что-нибудь одно. Тогда глагол «|-» приобретает некоторые новые смысловые значения, о которых мы пока умолчим[54].

Отмечу только, что символ «|-» говорит обычно о том, что, руководствуясь определёнными *правилами логики* (нам эти правила ещё предстоит изучить), мы можем совершенно формальным образом от посылок перейти к заключению. Поэтому слово «следует» здесь лучше читать как «выводимо».

Второй смысл глагола «следует» мы назовём *семантическим*. Знак, его представляющий, пишется так «|=». Он также говорит об отношении между посылками и заключением. Но это их отношение по истинности, которое мы можем знать заранее или только предполагать. Мы пишем |= между посылками и заключением, если хотим сказать, что при истинности посылок, истинно и заключение. Собственно, в этой беседе мы будем, в первую очередь, говорить о семантическом отношении *логического следования*.

Однако отметим, что оба знака следования обладают следующими важными свойствами:

1. Свойством *рефлексивности*: если до знака «|-» или «|=» стоит некоторое (вообще говоря, произвольное) высказывание, то после этого знака мы можем записать это же высказывание. Иначе говоря, каждое высказывание является следствием самого себя, как в семантическом, так и в синтаксическом смысле. Формально это выглядит так: $\alpha \mid\!- \alpha$ или $\alpha \models \alpha$. По существу это некоторая аксиома логики, которую называют иногда *законом тождества*. Слева от знака «следует» (но не справа) мы можем написать сколько угодно других высказываний. Правильность утверждения о следовании от этого не пострадает, если исходное следование уже установлено. Этот обобщённый случай мы запишем так: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \models \alpha_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Аналогично и для «|-».

2. Свойством *транзитивности*: если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \models \alpha_i$ и $\alpha_i \models \beta$, то $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \models \beta$. Аналогично и для знака «|-». При этом условие на число посылок и заключений остаётся тем же, что и для первого свойства.

3.5. Грамматика предметного языка. Понятие формулы

С помощью метаязыка попробуем теперь задать грамматику предметного языка. Для этого используем два подхода к (формальному) описанию запаса синтаксически правильных текстов этого языка.

[54] Пространное определение термина «посылка» см. в кн.: Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967. С. 327.

Первый подход заключается в задании порождающей процедуры (процесса), позволяющей последовательно получать необходимые фразы (формулы, выражения). Второй – в задании метода (алгоритма) распознавания правильно полученных фраз (формул, выражений).

Грамматику, соответствующую первому подходу, называют *порождающей*. Она содержит правила, которые позволяют, начиная с элементарных высказываний (пропозициональных букв), входящих в словарь исходно порождаемых знаков предметного языка, получать все синтаксически правильные фразы (формулы) предметного языка.

Грамматику, соответствующую второму подходу, называют *распознающей*. По любой записи (фразе) в алфавите предметного языка эта грамматика должна ответить на вопрос, получена ли эта запись по правилам порождающей грамматики предметного языка или нет. Иначе говоря, является эта запись (фраза) формулой или не является.

Объединение порождающей и распознающей грамматики называют *алгоритмической грамматикой*. Отметим, что грамматика предметного языка логики высказываний является алгоритмической. Этим она отличается от грамматики естественного языка. Ниже мы рассмотрим алгоритм распознавания порождаемых (выделяемых) ею объектов. Естественно, что в нашем случае объектами являются формулы, имитирующие высказывания естественного языка. Следовательно, задача алгоритма – распознавать формулы.

Опишем теперь общий вид формул, из которых будет состоять наш предметный язык. В отличие от естественного языка предложения логического языка имеют однозначно определённую структуру, аналогичную структуре алгебраических формул. Пока мы остановимся только на этой структуре, и не будем раскрывать смысл знаков, входящих в описание формул. Мы примем пока описание формул без пояснения их смысла, т.е. дадим определение понятию «формула» на синтаксическом уровне порождающей грамматики.

Определение 1. Определение понятия «формула»

1. Буквы p, q, r, .., p_1, p_2 и т.д. суть формулы предметного языка.

2. Если α и β – формулы предметного языка, то

2.1 $\neg\, \alpha$, 2.2. $(\alpha \,\&\, \beta)$, 2.3. $(\alpha \vee \beta)$, 2.4. $(\alpha \supset \beta)$, 2.5. $(\alpha \sim \beta)$ тоже суть формулы этого языка.

В данном определении латинские буквы пункта 1 принадлежат языку-объекту, а греческие буквы пункта 2 – языку исследователя. Остальные символы (знаки логических операций) используются, как говорят обычно, автонимно, то есть обслуживают и один, и другой язык[55].

[55] Подробно о понятии «автонимное употребление выражений» см. в кн.: Философская энциклопедия. Т. 1. М., 1960. С. 20–21.

Замечание 1. О понятии «часть формулы».

Кроме понятия «формула» мы будем употреблять понятие «часть формулы». Определим это понятие в терминах языка исследователя так: 1) Частью каждой атомарной формулы (пропозициональной буквы) является она сама. 2) Если $(\alpha \Box \beta)$ – формула, то её частями являются все части формул α и β и сама формула $(\alpha \Box \beta)$. Если $\neg \alpha$ – формула, то её частями являются она сама и все части формулы α. Здесь $\Box$ обозначает любой из знаков $\&$, $\vee$, $\supset$, $\sim$.

Замечание 2. О буквах алфавита.

Сначала отмечу, что в дальнейшем для представления отношений типа равенства между объектами в метаязыке будут использоваться символы «$\equiv$» (равенство значений истинности) и «$\Leftrightarrow$» (семиотическое равенство). Символ «$\sim$» будет использоваться при записи формул и в языке-объекте, и метаязыке как сокращение для $(\alpha \vdash \beta)$ и $(\beta \vdash \alpha)$, то есть как утверждение дедуктивного равенства формул.

Теперь о буквах. Выше мы сказали, что буквы p, q, r и т.д. (мы их называли *пропозициональными буквами*) принадлежат языку-объекту. Мы будем их называть также атомарными формулами (атомами). При интерпретации в естественном языке им соответствую простые предложения, то есть предложения, не содержащие союзов, например, «2 + 2 = 4». В остальное время – это неопределённые имена, открытые для подстановки. Остальные буквы (знаки $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$, $\sim$) служат для того, чтобы «из атомов строить молекулы». Их называют *логическими связками*, потому что они действительно играют роль союзов, но с особым логическим смыслом. Высказывания, содержащие хотя бы один такой знак, называют сложными (или молекулами). О содержании этих знаков мы поговорим позднее.

В свою очередь, буквы α и β принадлежат (как мы также уже отметили выше) метаязыку. Они символизируют произвольные формулы языка-объекта, в том числе, конечно, и пропозициональные буквы.

Чтобы понять разницу между записями формул в предметном и метаязыке, рассмотрим две записи: $(p \,\&\, q)$ и $(\alpha \,\&\, \beta)$. Первая принадлежит предметному языку, вторая языку исследователя. Первая – это формула в собственном смысле, как это понятие определено выше. Она представляет сама себя. Вторая – это, вообще говоря, не формула, а сокращённая запись произвольного числа формул, главной связкой которых является связка «&». Так, вторая запись может представлять как формулу $(p \,\&\, q)$, так и формулу $((p \supset q) \,\&\, (q \vee r))$.

Замечание 3. О прочтении формул.

Допустим, что мы хотим в языке-объекте каким-то образом выразить факт истинности высказывания α. Это сделать в метаязыке, конечно, просто, сказав: «α истинно». Но слова «истинно» в нашем языке-объекте нет. Следовательно, такой способ характеризации истинности высказывания, весьма естественный в метаязыке, совершенно непригоден в языке-объекте. Как же быть, ведь переводя предложения с естественного языка на язык логики, мы нуждаемся в некотором способе выражения истинностного значения высказываний для их «внутренней характеристики» в самом языке-объекте?

Однако, поскольку принята гипотеза двузначности, мы, по существу, избавлены от необходимости, использовать слово «истинно» в указанном выше случае. В самом деле, рассмотрим таблицу:

Таблица 1

α	«α истинно»
0	0
1	1

Эта таблица говорит о том, что свойство быть истинной формулой (высказыванием) представимо в языке-объекте нашей теории. Это очень важное обстоятельство. В дальнейшем оно облегчит нам построение самой теории. Поэтому постараемся запомнить, что записанное в предметном языке p означает «p истинно» в том же языке.

И заметим, что умение различать язык-объект и язык исследователя необходимо для понимания того, что такое логика. Замечательный американский математик и логик С.К.Клини по этому поводу заметил так: «Тому, кто не готов к этому, стоит сразу же закрыть эту книгу и подыскать себе другое занятие по вкусу (скажем, составление шарад или пчеловодство)»[56] .

Теперь вернёмся к **Определению 1**. Это определение понятия формулы отвечает принципу логической однозначности, позволяя ответить на вопрос: является ли произвольная запись в алфавите языка логики высказываний формулой этого языка или нет? Если это формула, то, соблюдая правила нашей грамматики, её всегда можно построить.

В качестве примера рассмотрим запись $\neg ((p \ \& \ q) \supset \neg p)$, и попробуем ответить на вопрос, является ли эта запись формулой. Для этого попробуем построить эту запись (по частям) с помощью правил нашей грамматики.

---

[56] *Клини С.К.* Математическая логика. М., 1973. С. 12.

Итак,

p   q   p — Начинаем с применения пункта 1.

(p & q)   ¬ p — Это применение пунктов 2.1. и 2.2.

((p & q) ⊃ ¬ p) — Это применение пункта 4.

¬ ((p & q) ⊃ ¬ p) — Это применение пункта 2.1.

На этом примере видно, что формулы нашего предметного языка растут, как растут деревья. Корнем дерева является формула, которую мы хотим построить, а листьями служат атомы. Они составляют верхний ярус дерева. Этой же картинкой указывается и обратный процесс – расщепление формулы на части.

Задание 1: Попробуйте это сделать сами.

Каждый шаг роста (ярус построения) сложной формулы, строго говоря, должен отмечаться правилом, оправдывающим этот шаг[57]. И такие шаги будут продолжаться до тех пор, пока в корне дерева не появится требуемая формула. Знак, введённый на последнем шаге построения формулы, называют *главным знаком* этой формулы, а части формулы, соединённые главным знаком, – его *непосредственными составляющими*. В нашем примере главным знаком является «¬», а его непосредственной составляющей формула ((p & q) ⊃ ¬ p).

Заметим, что сам *процесс порождения* формул не является строго алгоритмическим. Тот или иной шаг процесса (построения) не предопределён однозначно. Но определение формулы, тем не менее, разрешимо, поскольку *процесс распознавания* формул является алгоритмическим. Это подтверждается следующим алгоритмом:

Определение 2. Алгоритм распознавания формул

1) В проверяемом выражении (записи) все атомарные формулы заменяем буквой α и переходим к пункту (2);

2) Смотрим, совпадает ли результат с буквой α; если совпадает, ответ положителен, то есть проверяемое выражение является формулой; если не совпадает, переходим к пункту (3);

[57] Мы этих правил не формулировали и ограничились **Определением 1**.

3) Смотрим, есть ли в полученном результате отрезки одного из следующих видов: ... ($\alpha \square \alpha$)... или $\neg\, \alpha$, где $\square$ это какой-либо из символов &, $\vee$, $\supset$ или ~ . Если есть, то самый левый отрезок заменяем на α и переходим к (2). Если нет, то ответ отрицательный – проверяемое выражение не является формулой.

Задание 2. Хотя приведённый алгоритм сравнительно прост, всё же полезно выяснить, действительно ли он соответствует данной задаче, то есть всегда ли ответы, полученные по этому алгоритму, будут ответами на вопрос: является ли данная запись (в алфавите нашего языка-объекта) формулой или нет? Покажите, что данный алгоритм действительно соответствует данной задаче.

Задание 3. Пользуясь данным выше определением понятия формулы, проверьте, являются ли следующие выражения формулами:

$((p \supset q) \,\&\, r) \supset (p \,\&\, r))$,

$((p \sim q) \supset r)$,

$(((p \supset q) \vee r) \,\&\, (r \sim p))$,

$(\neg\, p \supset r \,\&\, (q \vee r)$.

Рассмотрите также графы этих выражений и найдите все части правильно построенных формул, если таковые есть.

Замечание 4. Выше уже отмечалось, что пропозициональные буквы в нашем языке – это неопределённые постоянные, или, иначе, это имена для каких-то, пока нам неизвестных, простых предложений естественного языка, причём имена, выбранные совершенно произвольно. Поэтому мы можем одни такие имена заменять другими, соблюдая, однако

Правило переименования атомов: Если α (p_1, p_2, ..., p_n) формула, содержащая *n* попарно различных атомов p_1, p_2, ..., p_n и q атом такой, что он (графически) отличен от каждого p_i ($1 \leq i \leq n$), тогда в формуле α (p_1, p_2, ..., p_n) любой из попарно различных атомов можно переименовать на q *всюду, где он входит в эту формулу.*

Так, в формуле $((p \supset q) \,\&\, (q \vee r))$ любому из трёх различных атомов мы можем присвоить другое имя, если это имя не встречается в данной формуле, в частности, записать её так: $((p \supset q) \,\&\, (q \vee s))$, поскольку s (графически) отлично от p и q. Такое переименование не изменит логическое значение исходной формулы. Но заменить r на p или q уже нельзя. Такая замена изменит её значение. Только для формул особого вида, называемых логическими законами (о них будет речь впереди) условие на переименование можно ослабить, не требуя графического различия заменяемых имён. Но хотя логическое значение исходной формулы при этом не измениться, всё же изменится её смысл.

Замечание 5. Знаки, которые мы использовали при определении понятия «формула», это не только имена (символы) для высказываний, но и другие, пока ещё необъяснённые знаки. Однако нетрудно догадаться, что это аналоги сочинительных союзов естественного языка. Согласно **Определению 1**, таких аналогов у нас пять. И, соответственно, по типу главного знака формулы, мы будем рассматривать пять *высказывательных форм.* При этом с каждой формой мы свяжем некоторую собственную логическую функцию – *присоединённую функцию данной формы.* По основаниям, о которых мы скажем ниже, такие функции называют истинностными. В логическом языке представителями таких функций служат логические связки.

3.6. О логических связках

Союзы, которые используются в логике, называются *логическими связками* или *логическими операциями.* Их немного. Некоторые из них очень похожи на сочинительные союзы естественного языка, некоторые нет. Но в любом случае, чтобы добиться точности в их значениях, логические связки определяются независимо от их смысла в естественном языке. Для этого применяется либо матричный способ характеризации логических связок, либо описание с помощью правил тех действий, которые с этими связками мы можем совершать. Оба способа мы будем рассматривать параллельно. Замечу, что все логические связки обозначаются знаками, отличными от знаков, применяемых для обозначения союзов естественного языка.

Знакомство с логическими связками мы начнём с *отрицания.* В естественном языке отрицание обычно относят не к союзным словам, а к частицам. Но в логике оно играет фундаментальную роль именно как союзное слово. В естественном языке ему соответствуют словосочетания «неверно, что...» или «неправда, что...», или же просто частицы «не» или «ни», которые входят в группу глагола или ставятся перед всем высказыванием. Случай, когда отрицание входит в состав так называемых «отрицательных терминов» (некрасивый, невежливый, неинтересный и пр.) мы оставим в стороне.

Итак, рассмотрим высказывание: «Неверно, что все понимают то, что я сейчас сказал». Это пример сложного высказывания и притом отрицательного. В нём отрицается высказывание «Все понимают то, что я сейчас сказал». Это высказывание, вообще говоря, тоже сложное. И даже настолько сложное, что его нельзя адекватно записать на языке логики высказываний. Но мы обойдём эту трудность.

Мы просто обозначим утвердительную часть нашего высказывания греческой буквой α, а выражение «Неверно, что ...» более коротким «не» (то есть скажем: «Не все понимают то, что я сейчас сказал»). Тогда наше исходное высказывание запишется совсем коротко: «не-α».

Как можно оценить истинностное значение этого высказывания?

Очевидно, что оно зависит от значения истинности высказывания α:

1) если α истинно, то не-α ложно,

2) если не-α истинно, то α ложно.

Эти два условия мы и примем в качестве семантического определения для логического отрицания. Никакого другого смысла в термин «отрицани» обычно и не вкладывают. Но так как его другие смыслы, вообще говоря, не исключаются, то «эмансипацию» нашего отрицания от возможных других его смыслов мы, во-первых, оформим синтаксически, заменив частицу «не» символом «$\neg$», а во-вторых, – семантически, определив отрицание таблично:

Таблица 2

α	0	1
$\neg\alpha$	1	0

После того, как мы ввели таблицу для отрицания, покажем что высказывания «$\neg\alpha$» и «α ложно» можно не различать, точно так же, как выше мы договорились не различать высказывания «α» и «α истинно».

Это подтверждается таблицей:

Таблица 3

α	$\neg\,\alpha$	«α ложно»
0	1	1
1	0	0

Иначе говоря, для характеристики ложности высказывания в языке-объекте слово «ложно» не нужно так же, как в нём не нужно слово «истинно» для выражения истинности высказывания.

Таблица 2 позволяет записать в метаязыке два утверждения о логическом следовании (в его интуитивном семантическом смысле), касающихся отрицания:

1) $\alpha \models \neg\neg\,\alpha$

2) $\neg\neg\,\alpha \models \alpha$.

Задание 4. Проверьте это, построив таблицу.

Условимся называть формулы α и β *семантически тождественными* (и писать $\alpha \equiv \beta$), когда $\alpha \models \beta$ и $\beta \models \alpha$. Семантическая тождественность формул α и β означает, что им соответствует одна и та же логическая функция истинности. Очевидно (на основании свойства рефлексивности), что любое высказывание семантически тождественно самому себе.

Оба следования 1) и 2) отражают обычную практику обращения с отрицанием в естественном языке, практику, видимо настолько обычную, что Аристотель даже не включил их в каталог основных аксиом (правил) своей логики. Позднее тождество $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ назвали законом двойного отрицания (*duplex negatio affirmat*) или инволюцией. И этот закон стал предметом важных методологических дискуссий[58].

Данная семантическая характеристика отрицания позволяет нам перейти к его синтаксической характеристике посредством правил вывода.

Правила вывода – это предписания, которым необходимо следовать в процессе рассуждения, если мы хотим обеспечить *логическую корректность* нашей мысли. Правила сродни юридическим нормам. С той только разницей, что юридические нормы устанавливаются и поддерживаются человеческим произволом, а нормы, то есть правила логики, имеют объективную основу в «логике вещей», о которых мы рассуждаем, что далеко не всегда можно сказать о нормах юридического права. Мы увидим в дальнейшем, что правила соответствуют *логическим законам*, а последние не являются делом произвольного выбора[59].

По определению, введём два таких правила для отрицания:

1) правило введения двойного отрицания: $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$,

2) правило удаления двойного отрицания: $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$.

Аналогично предыдущему, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$, то формулы α и β будем называть *дедуктивно тождественными*. Правда, аналогия здесь не полная, поскольку в общем случае дедуктивная тождественность формул не совпадает с семантической их тождественностью – первая слабее второй[60].

Разумеется, на этом ни семантическая (табличная), ни синтаксическая (посредством правил) характеристика *логики отрицания* не заканчивается. Но к более полной её характеристике мы обратимся позднее. А пока отметим только выгоду от упрощения, которое мы получаем, используя эти правила: любое чётное число идущих под-

---

58 Об этом подробнее см.: *Есенин-Вольпин А.С.* Отрицание в логике // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967. С. 187–188.

59 Замечу, кстати, что без логических законов в теории можно обойтись, а вовсе без правил нельзя.

60 Об этом подробно см.: *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979.

ряд отрицаний можно исключить из состава высказывания или, напротив, включить в его состав, не изменяя при этом истинностной характеристики высказывания. В самом деле, любое число идущих подряд отрицаний (если таковые имеются) равно $(n + 1)$, где $n \geq 0$; если *n чётное,* то $(n + 1) = 1$, если нечётное, то $(n + 1) = 0$.

Перейдём теперь к характеристике следующей логической операции, которая будет соответствовать союзу «и» естественного языка. Мы обозначили эту операцию символом «&» и присвоили ей собственное имя, назвав её *конъюнкцией*. Высказывание, в котором главным знаком является конъюнкция, принимает следующий общий вид: $(\alpha \,\&\, \beta)$, где α и β произвольные высказывания. Однако не следует думать, что у логического «&» и грамматического «и» в точности одинаковый смысл. Например, логическое «&» коммутативно. Не меняя смысла конъюнкции, мы можем переставить её члены. Но для естественного языка такая перестановка допустима не всегда.

И всё же, с некоторыми издержками, мы будем выражать логической связкой «&» следующие речевые обороты:

α и β.

Не только α, но и β.

β, хотя и α.

β, несмотря на α.

Как α, так и β.

α вместе с β.

α в то время, как β.

Характеристику конъюнкции продолжим примером[61].

Предположим, что заспорили два человека, каждый из которых утверждает истинность некоторого своего высказывания. Пусть это будут высказывания α и β. Таким образом, в нашем случае имеются две гипотезы: α истинно и β истинно. Положим, что, выслушав доводы обоих спорящих, вы выражаете согласие и с одним, и с другим. Вы говорите: «вы оба правы». Это означает, что сами вы фактически утверждаете совместную истинность высказываний α и β. Ясно, что истинность этого вашего утверждения полностью определяется истинностью высказывания $(\alpha \,\&\, \beta)$. Давайте эту зависимость выразим таблично:

Таблица 4

α	β	$(\alpha \,\&\, \beta)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

61 Все русские версии этой и других логических связок я заимствую из кн.: *Клини С.К.* Математическая логика. М., 1973.

Самая правая колонка этой таблицы подтверждает сказанное нами выше и показывает, каким образом истинностное значение конъюнктивного высказывания определяется истинностными значениями его составляющих.

А как получились две первые колонки?

В них мы поместили (в лексикографическом порядке) все возможные распределения значений 0 и 1 для двух (произвольных) высказываний α и β. Их имена мы поместили на входах таблицы.

Мы рассуждали при этом примерно так: хотя α и β произвольные высказывания, их значения фиксированы, причём независимо одно от другого. Поэтому они не могут произвольно меняться в ходе нашего рассуждения. При условии, что α истинное высказывание, имеются две возможности для β. Оно может быть либо истинным, либо ложным. Если β истинно, то в колонку для конъюнкции мы помещаем 1, а если β ложно, то записываем 0. Так мы заполняем последние две строки. Верхние две строки заполняются аналогично, исходя из симметричной гипотезы, то есть из предположения, что α ложно. Это рассуждение можно повторить и для β. Результат будет тем же при условии, что высказывания α и β принимают свои значения независимо друг от друга.

Данный ход нашего рассуждения можно представить иначе, если воспользоваться возможностями метаязыка и информацией **Таблиц 1 и 3**. Для этого введём (бинарный) оператор «→», определяющий схему перехода значений высказываний от одного к другому пока не закончится запись. Например, запись $\alpha \to \beta$ выражает переход от истинного высказывания α к истинному высказыванию β. Хотя эту запись можно читать и так: «если высказывание α истинно, то высказывание β истинно» или ещё: «от истинного высказывания α можно перейти к истинному высказыванию β», всё же оператор «→» это не связка «если ..., то», а своего рода «дорожный указатель пути». При этом ход рассуждения, которое мы провели при заполнении таблицы, выразиться в следующих определяющих схемах, полностью характеризующих семантику конъюнкции[62]:

$$\alpha \to (\beta \to (\alpha \,\&\, \beta)),$$
$$\alpha \to (\neg\, \beta \to \neg\, (\alpha \,\&\, \beta)),$$
$$\neg\, \alpha \to (\beta \to \neg\, (\alpha \,\&\, \beta)),$$
$$\neg\, \alpha \to (\neg\, \beta \to \neg\, (\alpha \,\&\, \beta)).$$

Итак, по определению, конъюнктивное высказывание истинно тогда и только тогда, когда все непосредственные составляющие этого высказывания истинны. Исходя из определения, получаем следующие утверждения о семантическом следовании:

[62] С учётом правила прочтения формул согласно **Таблицам 1 и 2**.

$$(\alpha \ \& \ \beta) \models \alpha,$$
$$(\alpha \ \& \ \beta) \models \beta,$$
$$(\alpha \ \& \ \beta) \models (\alpha \ \& \ \beta),$$
$$\neg (\alpha \ \& \ \beta), \alpha \models \neg \beta,$$
$$\neg (\alpha \ \& \ \beta), \beta \models \neg \alpha.$$

Замечу, что умозаключать по схемам:

$$\neg (\alpha \ \& \ \beta), \neg \alpha \models \neg \beta, \beta,$$
$$\neg (\alpha \ \& \ \beta), \neg \beta \models \neg \alpha, \alpha,$$

в принципе допустимо, но не интересно, если заключение принимать в целом как альтернативу. Иначе такое умозаключение не будет окончательным, поскольку эти схемы указывают на неопределённость следствия при недостатке информации и требуют дальнейшего анализа.

Известно, что в естественном языке сочинительный союз «и» представлен неоднозначно. Его функцию могут выполнять и другие союзы, например, «но» или «а». Но даже в том случае, когда предложения связаны союзом «и», отнюдь не всегда гарантирована сохранность смысла исходного высказывания при перестановке его составляющих. Так, соединительные предложения «Стало совсем темно, и улица мало-помалу опустела» (А.П.Чехов) или «Кучер тронул вожжами, и тройка унеслась в степь» (А.Н.Толстой) указывают на последовательную связь событий с временным отношением. А высказывание «Они пошли в сарай и легли на сене» при перестановке составляющих вовсе лишается смысла.

Напротив, в логике, поскольку она вообще абстрагируется от смысла высказываний, члены конъюнкции перестановочны. Это очевидно из **Таблицы 4**. Говорят в этом случае, что конъюнкция коммутативна.

Сформулируем теперь *дедуктивные правила* обращения с конъюнкцией, аналогично тому, как мы это сделали для отрицания. Таких правил мы примем три:

1) $\&_у$: $\alpha \ \& \ \beta \vdash \alpha$,
2) $\&_у$: $\alpha \ \& \ \beta \vdash \beta$,
3) $\&_в$: $\alpha, \beta \vdash \alpha \ \& \ \beta$.

Первые два называют правилами *удаления* конъюнкции, а третье – правилом *введения* конъюнкции. Они, так же как и таблица, служат для определения этой логической связки, но только в синтаксическом аспекте. Именно этот синтаксический аспект и нужен нам, чтобы понять, что в логике имеют в виду, когда говорят о понятии «доказательство» (или «вывод»).

Не будем торопиться с определением последнего понятия. Воспользуемся пока тем, чем мы уже располагаем, чтобы получить первые навыки в доказательствах логических теорем. Попутно заметим, что правила не обязательно записывать «в строчку», т. е. линейно. Более того, обычно предпочитают записывать правила «столбиком». Например, правила 1–3 можно записать так:

$$\&_{у}\ \frac{\alpha \,\&\, \beta}{\alpha} \qquad \&_{у}\ \frac{\alpha \,\&\, \beta}{\beta} \qquad \&_{В}\ \frac{\alpha,\ \beta}{\alpha \,\&\, \beta}$$

Докажем теперь формально то, что выше мы постулировали содержательно (семантически) на основании табличного анализа, а именно, что *конъюнкция коммутативна*. Это означает, что её составляющие можно переставлять (конъюнктивное высказывание не зависит от порядка входящих в него высказываний).

Пример 1.

Тезис 1: $\alpha \,\&\, \beta \vdash \beta \,\&\, \alpha$.

Доказательство: $\alpha \,\&\, \beta$ – посылка тезиса.
α – результат применения $\&_{у}$ к посылке.
β – результат применения $\&_{у}$ к посылке.
$\beta \,\&\, \alpha$ – результат применения $\&_{в}$ к β и α в последовательности $\beta \to \alpha$.

Возможно, нагляднее было бы:

$$\frac{\dfrac{\alpha \,\&\, \beta}{\beta} \qquad \dfrac{\alpha \,\&\, \beta}{\alpha}}{\beta \,\&\, \alpha}$$

посылка;
применение правила $\&_{у}$ к посылкам;
применение правила $\&_{в}$ к результату $\&_{у}$.

Пример 2. Пользуясь правилами 1)–3), докажем ещё одно свойство конъюнкции – её ассоциативность.

Тезис 2: $(\alpha \,\&\, \beta) \,\&\, \gamma \vdash \alpha \,\&\, (\beta \,\&\, \gamma)$.

Доказательство:	$(\alpha \,\&\, \beta) \,\&\, \gamma$	посылка.
	$(\alpha \,\&\, \beta)$	по правилу 1, применённому к посылке;
	γ	по правилу 2, применённому к посылке;
	α	по правилу 1, применённому к $(\alpha \,\&\, \beta)$;
	β	по правилу 2, применённому к $(\alpha \,\&\, \beta)$;
	$(\beta \,\&\, \gamma)$	по правилу $\&_{в}$, применённому к β и γ;
	$\alpha \,\&\, (\beta \,\&\, \gamma)$	по правилу $\&_{в}$ к α и $(\beta \,\&\, \gamma)$.

Задание 5. Доказать тезис, обратный доказанным выше тезисам 1 и 2.

Семантическое доказательство обоих тезисов можно получить разбором случаев. Заметим, что если имеют место свойства коммутативности и ассоциативности, то при вычислении значения истинности формулы, скобки можно не ставить.

Возможно, что знакомство с конъюнкцией научит нас осторожности в утверждениях, ведь разрешая спор утверждением «вы оба правы», в трёх из четырёх возможных случаев мы сами могли ошибиться. Очевидно, что такое утверждение слишком рискованно, если не располагать при этом достаточным основанием (информацией).

Допустим, мы учли это обстоятельство и, не желая рисковать, и в то же время, не желая ссориться с кем-либо из наших друзей, мы решили уклониться от определённого ответа и высказались примерно так: «кто-нибудь из вас прав». Какова теперь возможность для нас оказаться неправым?

Давайте снова построим таблицу, аналогичную той, которую мы построили для конъюнкции. Заполним её левые колонки, а правую пока оставим пустой (из-за невозможности представить *процесс* заполнения таблицы я ниже воспроизвожу её полностью):

Таблица 5

α	β	$(\alpha \vee \beta)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Хотя мы высказались весьма осторожно, наше утверждение всё же будет ложным, если ложны оба высказывания α и β: в этом случае утверждая, что кто-то из спорящих прав, мы сами, бесспорно, ошибаемся. Поэтому мы пишем 0 в верхней строке таблицы в её правой колонке. Но если кто-либо из наших друзей действительно прав, мы тоже, конечно, правы. Значит, наше решение можно оценить единицей во второй и третьей строчках правой колонки таблицы.

Очень может быть, что, говоря «кто-нибудь из вас прав», мы ещё не знали, кто же именно из наших друзей прав. И так как нам, по-видимому, хотелось бы сохранить с обоими хорошие отношения, нас весьма обрадует, если оба они окажутся правы. В этом случае мы в явном выигрыше, ведь мы не утверждали, что прав только один из них, и поэтому никто не может нас упрекнуть ни в том, что мы ошиблись или солгали, ни в том, что мы приняли чью-либо сторону. Таким образом, последняя строка правой колонки нашей таблицы получает значение 1. Нам остаётся лишь назвать связку, которая определяется этой таблицей. Эту связку в логике называют *дизъюнкцией*.

По аналогии с конъюнкцией таблицу для дизъюнкции также можно описать с помощью определяющих схем (аксиоматически):

$\alpha \to (\neg \beta \to \neg (\alpha \vee \beta))$,
$\alpha \to (\beta \to (\alpha \vee \beta))$,
$\alpha \to (\neg \beta \to (\alpha \vee \beta))$,
$\alpha \to (\beta \to (\alpha \vee \beta))$.

Очевидно, что естественной «грамматической моделью» этой логической связки служит неразделительный союз «или»: *одно или другое верно, но, возможно, и оба*. Однако не во всех контекстах смысл связки «или» естественного языка совпадает с нашим табличным смыслом. Например, сложное высказывание «Она извиниться или я не приду» подразумевает по существу условно-временное отношение между его простыми составляющими «Я приду, только если она извинится». В выражении «пан или пропал» члены дизъюнкции исключают друг друга. В этом случае дизъюнкция имеет разделительный смысл, и её называют *строгой* или *альтернативой* (от латинского alter – один из двух). В юридических документах этот смысл обычно отмечается записью «и/или». Однако он не является независимым, и его можно выразить с помощью неразделительного «или».

Вот переводы связки «$\vee$» в естественные обороты речи:
α или β или оба.
α, если не β.
α и/или β (в юридических текстах).

Замечание 6. Отметим, что если мы имеем ряд формул $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, попарно несовместимых (по истинности), когда исключается случай одновременной истинности любых двух формул из данного ряда (то есть $\neg (\alpha_I \& \alpha_j)$ при $i \neq j$ и $i, j = 1, 2, 3, ...$, хотя возможно, что $\neg \alpha_i \& \neg \alpha_j$), то наша дизъюнкция совпадает с альтернативой.

Чтобы избежать возможных недоразумений при переводе фраз естественного языка на язык логики, необходимо учитывать те значения дизъюнкции, которые определены **Таблицей 5**.

Из таблицы для дизъюнкции (привлекая связки & и $\neg$) непосредственно получаем:
$\alpha \models \alpha \vee \beta$,
$\beta \models \alpha \vee \beta$,
$\alpha \vee \beta \models \beta \vee \alpha$,
$\alpha \vee \beta, \neg \alpha \models \beta$ (β, если не-α),
$\alpha \vee \beta, \neg \beta \models \alpha$ (α, если не-β),
$\neg (\alpha \vee \beta) \models \neg \alpha \& \neg \beta$,
$\neg (\alpha \& \beta) \models \neg \alpha \vee \neg \beta$.

Мы рассмотрели условия истинности дизъюнкции и дали примеры семантического логического следования для формул, содержащих эту связку как главную. Сформулируем теперь синтаксические, то есть чисто формальные, правила обращения с дизъюнкцией, которые потребуются для описания общего понятия о логическом доказательстве. При этом мы должны предусмотреть уже введённые выше соотношения, обусловленные семантическим содержанием дизъюнктивной связки.

Как и для конъюнкции, для дизъюнкции таких правил будет три:

Два правила введения $\vee_{в}$: 1. $\alpha \vdash (\alpha \vee \beta)$,

2. $\beta \vdash (\alpha \vee \beta)$.

И одно правило удаления дизъюнкции $\vee_{у}$: 3. $(\alpha \vee \beta), \neg \alpha \vdash \beta$.

Последнее правило имеет и другое название: *дизъюнктивный силлогизм* (и *modus tollendo ponens*). Оно является основой разделительного косвенного доказательства, когда посылкой служит многочленная дизъюнкция гипотез, одна из которых, по крайней мере, предполагается истинной. Эту гипотезу находят последовательным исключением всех остальных.

Перейдём теперь к одной из самых важных логических связок, формализующей условные суждения вида «Если α, то β». Например: «Если плохо мыслишь, то плохо рассуждаешь». Или «Если плохо рассуждаешь, то от истинных посылок можешь придти к ложным заключениям». Связка «Если..., то...» обычно обозначается символом «$\supset$» и называется *импликацией.* В выражении $(\alpha \supset \beta)$ левый член α называют *антецедентом* импликации, а правый член β *консеквентом* импликации.

Импликация считается самой трудной логической связкой. Во-первых, потому, что она ассоциируется с логическим выводом. Во-вторых, потому что, отражая связь антецедента и консеквента (основания и следствия) только по их истинностным значениям, она заметно отклоняется от естественных грамматических моделей обычного языка, выражающих условную связь суждений.

Вот почему мы с самого начала договоримся принимать логический смысл этой связки на веру и без протестов, довольствуясь той аргументацией, которая непротиворечиво «вписывает» импликацию в систему уже принятых нами логических связок, и примем следующий её перевод:

Если α, то β.
Коль скоро α, то β.
В случае α имеет место β.
Для β достаточно α.
Для α необходимо β.
α влечёт (имплицирует) β.
α, только если β.
β, если α.

А теперь допустим, что, вникнув в суть обсуждаемых высказываний, вы решили, что α верно, только если верно β. Об этом вы и объявляете вашими друзьям, то есть вы говорите: «Первый из вас прав, только если прав второй».

Что это означает с точки зрения тех истинностных значений, которые следует приписать вашему суждению?

Мы обсудим этот вопрос, рассмотрев следующую таблицу:

Таблица 6

α	β	$(\alpha \supset \beta)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Вполне естественна 1 в последней строчке правой колонки: в этом случае вы правы, ведь вы настаиваете на истинности α только при условии истинности β, а β здесь истинно. Но если вы настаиваете на истинности импликации в условиях значений истинности третьей строки, то вы уже неправы: факты противоречат вашему утверждению, поскольку β здесь ложно. Что же касается первой и второй строки нашей таблицы, то они на семантическом уровне отражают важный для формальной логики принцип: из ложных посылок можно вывести любое заключение, как истинное, так и ложное. Этот принцип носит латинское название *ex falso sequitur quodlibet.* Он принят в логике едва ли не со времён Платона.

Вот аксиомы, формально выражающие условия заполнения нашей таблицы для импликации:

1 $\neg\, \alpha \rightarrow (\neg\, \beta \rightarrow (\alpha \supset \beta))$,

2. $\neg\, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \supset \beta))$,

3. $\alpha \rightarrow (\neg\, \beta \rightarrow \neg\, (\alpha \supset \beta))$,

4. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \supset \beta))$.

Задержимся ещё немного на этой связке, и рассмотрим некоторые семантические отношения, характерные для неё и обусловленные её таблицей.

Утверждая истинность α только при условии истинности β, мы одновременно подразумеваем, что если β ложно, то α не может быть истинным (первая строчка таблицы). Это наше соглашение выразим так: $(\alpha \supset \beta), \neg\, \beta \models \neg\, \alpha$.

Заметим, однако, что в случае ложности α мы не получим такой однозначности, какую получили выше, потому что в этом случае β может быть как истинным, так и ложным (об этом говорят первая и вторая строки таблицы). Этот случай мы также отметим особой записью: $(\alpha \supset \beta), \neg \alpha \models \beta, \neg \beta$, из которой непосредственно следует неопределённость заключения. Умозаключать из посылок $(\alpha \supset \beta), \neg \alpha$ только к β или только к $\neg\beta$ нельзя, а заключать к $(\beta \vee \neg \beta)$ можно, но неинтересно.

И ещё. Заметим, что условные связи, вообще говоря, могут мыслиться как реальные или как нереальные (предполагаемые или вовсе неосуществимые – контрафактические). В первом случае они выражаются изъявительным наклонением, во втором – сослагательным. Если условная связь дополняется предположением о причинно-следственном характере этой связи и гипотезой о единственности причины, то утверждение «если α, то β» в качестве заключения допускает утверждение «если не-α, то не-β» (если нет причины, то нет и следствия). Но в общем случае такое заключение мы отбрасываем, хотя его возможность всё же отражена в таблице в строке: $(0 \supset 0) = 1$. Значит, табличная характеристика импликации потенциально богаче её формальной оценки.

Заметим также, что строка $(0 \supset 1) = 1$ тоже не произвольна. Она может быть обоснована тем, что следствие имеет место по другому основанию, чем то, которое обозначено в посылке. Это не исключено в силу множественности оснований (причин): «β, даже если не-α». Отсюда непосредственно получаем, что формула $(\neg \alpha \supset \neg \beta)$ не следует из формулы $(\alpha \supset \beta)$, то есть так умозаключать нельзя, если строго держаться законов двузначной логики.

Третья строка нашей таблицы указывает на известную *упорядоченность* импликативной связи: утверждая, что α истинно только при условии, что истинно β, мы отнюдь не хотим сказать, что и β истинно только при условии истинности α. Истинность консеквента импликации, так сказать, свободна от каких-либо условий. Но если бы мы эту истинность обусловили истинностью антецедента, у нас получилась бы вот такая конъюнкция: $(\alpha \supset \beta) \mathbin{\&} (\beta \supset \alpha)$.

Иногда эту конъюнкцию принимают в качестве определения ещё одной логической связки – *эквиваленции*. Я не буду на этом настаивать и (по аналогии с другими) приведу характеристическую таблицу этой связки:

Таблица 7

α	β	$(\alpha \sim \beta)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Вот перевод этой связки на естественный язык:

α, если и только если β.
Если α, то β, и обратно.
α, если β, и β, если α.
Для α необходимо и достаточно β.
α эквивалентно β.

Пример эквиваленции указывает на возможную «избыточность» связок, принятых нами в качестве основных. Действительно, если бы мы захотели пожертвовать выразительным богатством логического языка, нам было бы достаточно воспользоваться одной из следующих пар связок: $<\neg, \vee>$; $<\neg, \&>$; $<\neg, \supset>$. При этом отмечу, что отрицание не случайно входит в каждую из этих пар. Как мы уже видели выше, отрицание необходимо для выражения ложности какого-либо высказывания.

Факт «выразимости» с помощью любой из указанных выше пар связок всех остальных (факт функциональной полноты класса рассматриваемых функций) можно представить в виде таблицы, левую колонку которой образует указанный выше список этих пар, а каждая последующая колонка показывает, как связка, расположенная на входе этой колонки, может быть выражена парой связок левой колонки:

Таблица 8

	$(\alpha \vee \beta)$	$(\alpha \,\&\, \beta)$	$(\alpha \supset \beta)$
$\vee, \neg$	—	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	$(\neg\alpha \vee \beta)$
$\&, \neg$	$\neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$	—	$\neg(\alpha \,\&\, \neg\beta)$
$\supset, \neg$	$(\neg\alpha \supset \beta)$	$\neg(\alpha \supset \neg\beta)$	—

3.7. Естественная интерпретация логических связок

Итак, мы рассмотрели все логические связки, которые входят в состав выразительных средств языка классической логики высказываний. Мы знаем теперь, как ими пользоваться при переводах с естественного языка на язык формальный, и наоборот. Остаётся познакомиться с общими правилами перевода (кодирования) выражений естественного языка, содержащих эти связки, на язык логики, чтобы прояснить связь обоих языков и обеспечить корректность перевода. Правила эти таковы:

1) Если предложение естественного языка простое утвердительное, оно заменяется атомарной формулой предметного логического языка.

2) Если предложение (естественного языка) простое отрицательное, то сначала ищется его утвердительная часть, которая переводится по правилу 1), а полученный результат предваряется знаком отрицания.

3) Если предложение (естественного языка) сложное, необходимо выделить (найти) его простые составляющие и применить к ним правила 1) и 2). Затем следует, не нарушая смысла, произвести замену союзов естественного языка связками (операциями) логического языка в порядке вхождения союзов в структуру сложного предложения естественного языка. Порядок и последовательность связей при необходимости отмечаются скобками.

Выбор атомарных формул, вообще говоря, произвольный, но с одним исключением: в пределах одного перевода разные простые предложения естественного языка должны заменяться разными атомами логического языка так, чтобы соответствие простых предложений и атомов было взаимно однозначным.

Пример 3. Рассмотрим предложение «Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены». Это предложение сложное. Значит, сначала надо найти его простые составляющие. Они всегда будут утвердительные. В данном случае это «Правительственные расходы возрастут» и «Налоги будут снижены». Поскольку это разные предложения, для их перевода на язык логики необходимы разные атомы. Пусть это будет p для первого предложения и q для второго. По смыслу исходного предложения, и согласно 2), высказывание p следует теперь заменить на $\neg$ p. Последний шаг состоит в замене выражения «если..., то» логической связкой «$\supset$». Тогда всё предложение представляется (переводится) формулой ($\neg$ p $\supset$ q).

3.8. Табличная оценка формул

Мы познакомились с правилами перевода выражений (предложений) естественного языка на язык формул. Теперь нам предстоит научиться правилам табличной оценки самих формул, включая и правила построения таблиц. Эти таблицы называют *таблицами истинности* или таблицами истинностных значений. Отчасти мы уже знакомились с ними, когда давали определения логическим связкам. Рассмотрим задачу в общем виде, применительно к табличной оценке любой произвольной формулы.

Прежде всего, заметим, что для построения таблицы любой заданной формулы необходимо знать, сколько и каких различных пропозициональных букв (атомарных формул) в неё входят. Информация об этом определяет *число входов* таблицы.

Далее мы должны учесть, что для каждого атома (атомарного предложения) имеется две возможности: «быть истинным» или «быть ложным». Если не имеется дополнительной информации, мы обязаны учесть обе эти возможности. С учётом этих возможностей и числа различных атомов мы получим *число строк* для нашей таблицы. Если число различных атомов, входящих в формулу, равно n, то число строк таблицы будет равным 2^n.

Очень важно, что в нашем определении формулы предусмотрены скобки. Они служат, во-первых, для распознавания того, является ли некоторая данная запись формулой, а во-вторых, они указывают на то, какой именно формулой является данная формула. Например, $((p \supset q) \;\&\; \neg q)$ и $(p \supset (q \;\&\; \neg q))$ – это две формулы, разные и семантически, и синтаксически, о чём говорит положение внутренних скобок. Если бы мы убрали внутренние скобки, мы получили бы запись $(p \supset q \;\&\neg q)$, в которой однозначность прочтения была бы нарушена. Эту запись можно было бы толковать либо как первый, либо как второй из вариантов, указанных выше.

Однако от неоднозначности прочтения можно избавиться и в том случае, если разрешить некоторые скобки не ставить. Для этого надо только договориться о «рангах» логических связок, например, различить эти связки по убывающей *силе связывания*. Обычно принимают такой порядок: $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$, $\sim$. В этом случае ясно, что запись $(p \supset q \;\&\; \neg q)$ следует понимать как нашу вторую формулу. Более того, мы можем договориться и о том, что внешние скобки можно вообще опускать. Тогда наша вторая формула примет вид: $p \supset q \;\&\; \neg q$.

Решив задачу однозначного прочтения формул, попробуем решить задачу распознавания их истинностных значений. Мы уже знаем, что если алгоритм распознавания для какого-либо свойства формул можно построить, то проблема распознавания является *алгоритмически разрешимой*. Не каждая проблема распознавания алгоритмически разрешима. К счастью, для логики высказываний проблема распознавания её формул и проблема распознавания истинности этих формул разрешима. И одним из методов, решающих последнюю проблему, является метод истинностных таблиц. Наша задача, используя таблицы истинности логических связок, научиться вычислять истинностное значение любой сколь угодно сложной формулы. Чтобы освоить этот метод перейдём к правилам построения таблиц.

3.9. Порядок (правила) построения таблиц

1) Вычисление истинностного значения сложной формулы (молекулы) идёт по частям этой формулы.

2) Каждая таблица состоит из строк и столбцов.

3) Каждая таблица имеет столько столбцов, сколько частей имеет данная формула.

4) Каждая таблица имеет «входы» и «выходы».

5) Входом называется столбец всех возможных истинностных значений пропозициональной буквы.

6) Таблица имеет столько входов, сколько различных пропозициональных букв входит в данную формулу.

7) Выходы таблицы образуют части формулы, содержащие логические связки, причём вычисление идёт по главным связкам каждой части.

8) Число строк таблицы зависит от числа различных пропозициональных букв (простых высказываний, атомов), входящих в данную формулу. Если число таких букв равно n, то число строк равно 2^n.

9) Таблица строится слева направо: входы образуют первые столбцы (обычно в алфавитном порядке пропозициональных букв), далее располагаются выходы по степени сложности частей оцениваемой формулы. Последний справа столбец содержит общую её оценку.

Рассмотрим применение этих правил на примере.

Пример 4.

Вернёмся к известной нам формуле $((p \supset q) \,\&\, (q \vee r))$. Она содержит три различных атома. Значит, таблица будет содержать три входа, и эти атомы мы, соответственно, помещаем на входах. При этом порядок их выбора безразличен, но при заполнении строк обычно придерживаются лексикографического порядка. Табличную оценку всей формулы проведём по частям формулы. Поэтому вся таблица будет содержать столько входов, сколько частей в данной формуле. Атомарные её части мы уже обозначили. Теперь обозначим остальные согласно значениям логических связок:

Таблица 9

p	q	r	(p ⊃ q)	(q ∨ r)	(p ⊃ q) & (q ∨ r)
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Нетрудно заметить, что оценка частей формулы идёт построчно. Так как различных атомов в формуле 3, то число строк в таблице $2^3 = 8$.

Понятно, что с ростом числа атомарных высказываний, входящих в формулу, число строк таблицы быстро растёт. Хотя таблица может оказаться довольно громоздкой конструкцией, в принципе этот метод всегда позволяет произвести необходимую оценку формулы.

3.10. Формулы и их функции

Всё, о чём мы говорили выше, относится к двум различным понятиям и двум различным отношениям. Этими различными понятиями являются понятия *логической функции* и *логической формулы*, а различными отношениями – отношения между функциями и отношения между формулами.

С помощью таблиц мы каждой рассмотренной нами грамматической связке естественного языка однозначно сопоставили логическую операцию, а каждой логической операции – некоторую *функцию истинности*. Соответственно, и каждой формуле нашего языка однозначно соответствует некоторая логическая функция. Это следует хотя бы из того, что, по определению (пункт 3.5.), в каждой такой формуле есть главная логическая связка, которой и соответствует эта функция.

Очень важно понять, что логическая функция и логическая формула – это не одно и то же. Формула – это формальный образ высказывания, его рентгенограмма. Она предполагает живую связь с естественным языком посредством интерпретации её непосредственных составляющих. Если бы мы не нуждались в этой связи, то мы могли бы обойтись только истинностными значениями высказываний. И тогда мир логики был бы очаровательно прост. Наша логика предстала бы как логика нуля и единицы, на которых определены уже известные нам логические операции. По сути, это была бы уже не логика, а *алгебра логики*, т.е. формальная теория истинностных (0,1)-функций.

Однако мы хотим сохранить, с одной стороны, то, что связывает логику с естественным языком и естественным мышлением, а с другой придать анализу мыслительных процессов точный алгебраический смысл. Вот почему строители современной логики с понятиями «высказывание» и «формула» соединили абстрактный объект, именуемый термином «функция». Традиционная логика такого соединения не предполагала.

Участие функций в логике – это их ассоциированное членство. Согласно нашим определениям, с каждым осмысленным высказыванием естественного языка, представимым формулой логики (в частности, и пропозициональной буквой), ассоциируется некоторая функция истинности, которая каждому распределению значений по аргументам относит значения 0 (ложь) или 1 (истина). При этом имеет место определённая закономерность ассоциации формул и функций. Она зависит от числа различных атомарных составляющих, входящих в ту или иную формулу. Например, с одной пропозициональной буквой ассоциируются четыре функции.

Таблица 10

p	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функция f_1 ассоциируется с постоянной ложью. Функция f_4 представляет постоянную истину. Функция f_2 совпадает со значением атома, а функции f_3 соответствует отрицанию этого значения.

Ниже мы познакомимся с формулами, какими могут быть представлены эти четыре функции. Первая формулой противоречия: $p \,\&\, \neg p$. Четвёртая формулой исключённого третьего (*tertium non datur*): $p \vee \neg p$. Третья отрицанием атома: $\neg p$, а вторая просто совпадает с p. Ясно, что по отношению к функциям f_1 и f_4 пропозициональная буква p является фиктивным аргументом.

Итак, в логическом языке функции истинности задаются правильно построенными формулами. Можно сказать и так: каждой логической формуле однозначно соответствует некоторая функция истинности. Способность представлять ту или иную функцию истинности характеризует осмысленность формулы в языке логики, подобно тому, как способность представлять высказывание характеризует осмысленность предложения в естественном языке. Но если естественный язык, наряду с явно осмысленными конструкциями, допускает и другие, например, бессмысленные или лишь потенциально осмысленные, то в логическом языке нет таких синтаксически правильных конструкций, которые не были бы актуально осмысленными, т.е. не представляли бы ту или иную функцию истинности. Поэтому каждая формула логического языка имеет свою вполне определённую таблицу истинности. И если две графически различные формулы имеют одну и ту же таблицу истинности, это означает, что эти формулы логически тождественны, или, по-другому, логически эквивалентны. В естественном языке это, конечно, не всегда так.

Комбинаторная связь логических функций и логических формул такова: если формула имеет в точности *n* различных атомарных высказываний, то она способна представлять одну из $2^{(2^n)}$ неэквивалентных логических функций. При этом множество формул, отвечающих данному условию, в принципе бесконечно велико, в отличие от множества соответствующих им функций.

3.11. Таблицы истинности и классификация высказываний

Условимся определённое приписывание истинностных значений атомам оцениваемой формулы (строку таблицы) называть *интерпретацией* этой формулы. Каждое такое приписывание (строку таблицы) называют ещё *возможным миром*, а мир, в котором данная формула истинна, – *моделью* этой формулы. Вообще говоря, для каждой тестируемой формулы каждая строка таблицы является своего рода *потенциальной табличной моделью* (ПТМ), поскольку не исключено, что на этой строке, при данном наборе истинностных значений для входящих в неё пропозициональных букв, эта формула окажется истинной.

Строку, на которой формула истинна, назовём *табличной моделью* (ТМ) этой формулы[63]. Особенность этой модели в том, что она содержит все аргументы (с отрицанием либо без отрицания) функции, сопряжённой с этой формулой и может быть представлена как конъюнкция этих аргументов.

Конъюнкцию пропозициональных букв и их отрицаний и дизъюнкцию пропозициональных букв и их отрицаний называют, соответственно, *элементарной конъюнкцией* (конъюнктом) и *элементарной дизъюнкцией* (дизъюнктом). А всякую формулу, представляющую собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций или конъюнкцию элементарных дизъюнкций называют *нормальной формой* данной формулы, соответственно, дизъюнктивной или конъюнктивной.

На примере высказывания $((p \supset q) \& (q \vee r))$ мы познакомились с ситуацией, когда формула, имеющая восемь ПТМ, имеет только пять ТМ – она истинна в пяти случаях из восьми возможных. И естественно возникает вопрос, все ли высказывания ведут себя подобным образом, то есть, всегда ли в их оценке сохраняется разнообразие значений? Попробуем ответить на этот вопрос.

[63] В отличие от той модели, которая определяется интерпретацией пропозициональных букв, входящих в эту формулу, в терминах естественного языка.

Изучим возможные ситуации на опыте.

Дадим табличную оценку формулы ($p \,\&\, \neg p$).

Таблица 11

p	¬ p	(p & ¬ p)
0	1	0
1	0	0

Из этой таблицы видно, что при всех возможных интерпретациях (а их в точности две) высказывание ($p \,\&\, \neg p$) ложно.

Рассмотрим теперь случай формулы ($p \vee \neg p$).

Таблица 12

p	¬ p	(p ∨ ¬ p)
0	1	1
1	0	1

Ситуация здесь прямо противоположная: формула ($p \vee \neg p$) при всех возможных интерпретациях (а их в точности две) истинна.

Рассмотрев **Таблицы 10, 11 и 12**, мы исчерпали все возможные случаи. Следовательно, в соответствии с табличным результатом, характеризующим то или иное высказывание, все высказывания можно разделить на три класса:

1. Класс высказываний, имеющих «ложь» на каждой строке таблицы.
2. Класс высказываний, имеющих «истину» на каждой строке таблицы.
3. Класс высказываний, имеющих на одних строках «истину», а на других «ложь».

В соответствии с данной классификацией условимся называть:

1. Формулы (соответственно, высказывания), которые ложны при любой интерпретации (на любой ПТМ), – *противоречивыми* (или просто *противоречиями*), или невыполнимыми, или *тождественно-ложными*, или, наконец, *абсолютно оспоримыми*.
2. Формулы (соответственно, высказывания), которые истинны при любой интерпретации (на любой ПТМ), – *общезначимыми*, или *тождественно-истинными*, или *тавтологиями*, или неоспоримыми, или *логическими истинами*, или, наконец, *логическими законами*.
3. Формулы (соответственно, высказывания), которые при некоторой интерпретации истинны (имеют хотя бы одну ТМ), а при некоторой ложны – *непротиворечивыми*, или просто *выполнимыми*, или *фактическими истинами*.

Замечу в этой связи, что выполнимость можно разделить на фактическую и логическую. Очевидно, что всякая тождественно-истинная формула, выполнимая логически, выполнима и фактически, но не наоборот.

Используя терминологию, принятую выше, перескажем пункты 1–3 другими словами:

Пусть α ($p_1, p_2, ..., p_n$) формула, содержащая *n* атомов. И пусть *m* – число её табличных моделей. Тогда:

Если $m = 2^n$, то α всегда истинная и неоспоримая формула.

Если $0 < m < 2^n$, то α выполнимая, но оспоримая формула.

Если $m = 0$, то α противоречивая (всегда ложная) формула.

Отметим некоторые следствия из данных выше определений: 1) общезначимость влечёт фактическую выполнимость; 2) фактическая выполнимость влечёт непротиворечивость; 3) фактическая невыполнимость влечёт абсолютную опровержимость; 4) оспоримость влечёт необщезначимость; 5) непротиворечивость влечёт фактическую выполнимость.

Заметим, что в пунктах 1–3 речь идёт о свойствах логических формул (соответственно, высказываний), зависящих исключительно от их формальной структуры и табличного смысла, входящих в них логических союзов. При этом особый статус в логике имеют формулы (высказывания) двух первых видов, то есть логические законы и противоречия.

Последние традиционно связываются с представлением о разного рода ошибках в понятиях или рассуждениях – о софистических ошибках (софизмах), или о логических ошибках, или, наконец, о ситуациях более сложного характера, именуемых парадоксами. Но противоречия не только вредны, но и полезны. На дедуктивных свойствах противоречий основаны все так называемые косвенные доказательства в логике – доказательства от противного (*demonstratio ex contrario*) и сведение к невозможному (*reductio ad impossibile*).

Пример 5. Рассмотрим формулу $p \supset (q \supset (p \& q))$. Мы хотим выяснить, является ли эта формула истинной. Для этого попробуем сначала выяснить, не является ли она ложной. Главная связка в этой формуле – импликация. Импликация ложна, когда её посылка истинна, а её заключение – ложно. Примем это условие и заметим, что по отношению к формуле $q \supset (p \& q)$ требуется его повторить, для чего надо признать q истинным, а p ложным. Но это противоречит нашему предположению. Таким образом, попытка опровергнуть истинность формулы $p \supset (q \supset (p \& q))$ привела нас к противоречию. Следовательно, эта формула истинна. Её истинность мы уже установили выше, рассматривая таблицы для основных логических связок. Здесь вместо табличного метода мы применили *метод рассуждения от противного.* Постараемся запомнить идею этого метода.

3.12. Законы логики и логическое следование

Логические законы, издавна выражали традиционные философские представления о «вечных истинах» (*aeternae veritates*), об «истинах во всех возможных мирах», которые не должны зависеть от тех истин, к которым (как к «истинам факта») мы привыкаем в нашем обычном окружении. Логические истины (при том понимании логических связок, которое дано выше) нечувствительны к любым изменениям в порядке вещей нашего мира, включая эмпирические законы частных наук (так называемые законы природы). Это означает, что логика в её классическом понимании принадлежит не только данному мировому порядку, но что её законы отражают любой логически возможный (мыслимый непротиворечивым образом) порядок вещей. Инвариантностью к содержанию мысли, способностью представлять только её формальную правильность, обусловлено общенаучное значение логических законов: каталогизированные в системы они непротиворечиво входят в любую отрасль человеческого знания, образуя её «логическую ткань» как основу допустимых в этой отрасли правильных рассуждений.

Однако оставим на время этот внешний для логики аспект её применения и обратимся к её главной внутренней проблеме – проблеме вывода (или умозаключения). Посмотрим, как связана эта проблема с понятием о логических законах.

Выше мы познакомились с решением двух проблем – проблемой распознавания (правильно построенных) формул логики высказываний и проблемой нахождения истинностных значений для формул той же логики по таблицам.

И та, и другая проблемы являются *массовыми проблемами*, то есть такими, на которые нельзя ответить сразу «да» или «нет», поскольку ответ зависит от значения некоторого параметра. Например, в задаче на распознавание формул значениями параметра служат некоторые записи, сделанные на языке логики высказываний. А в задаче на вычисление истинностных значений по таблицам истинности – готовые формулы.

Массовая проблема, на которую нужно отвечать только «да» или «нет» (в зависимости от значения некоторого параметра) называется *проблемой разрешения.* Проблема разрешения называется алгоритмически разрешимой, если существует решающий её алгоритм.

Обе уже рассмотренные выше проблемы алгоритмически разрешимы. Посмотрим теперь, является ли разрешимой проблема следования в логике высказываний. Это весьма актуальный вопрос. Проблема логического следования является для логики самой главной проблемой, ведь предмет логики это, прежде всего, мыслительные акты умозаключений.

Напомню, что в понятии «логическое следование» всегда (ещё со времён Аристотеля) подразумевались два аспекта – синтаксический (или формальный), указывающий на зависимость от допустимых правил вывода при переходе от посылок к следствию (например, по правилам силлогизма), и семантический (или содержательный), таких правил, вообще говоря, не подразумевающий.

Семантический аспект (в отличие от синтаксического) непосредственно связан с «практической пользой» логики в качестве основы для анализа некоторой содержательной области. В семантическом понятии логического следования явно предусматривается связь посылок и заключения в их отношении к некоторой действительности, которую они описывают, к их модели. При этом естественным образом определяется и понятие истинности (в смысле Аристотеля). Иначе говоря, семантический аспект следования отвечает интуитивному («житейскому») его пониманию: если мы правильно рассуждаем, то из истинных посылок должны получаться только истинные следствия.

Задержимся теперь на этом интуитивном понимании логического следования и попробуем его уточнить.

Заметим, что понятие логического следования в его интуитивном смысле (например, так, как мы им пользовались до сих пор) принадлежит языку исследователя. Это содержательное понятие. Чтобы сделать его объектом предметного языка, необходимо сделать его формальным, придать ему вид формулы этого предметного языка. Это позволит применять к отношению логического следования те же операции, которые применяются и к остальным формулам логики.

Построим коротенькую табличку из двух колонок:

Таблица 13

α	$\models\beta$	$\alpha\supset$	β
0	0	0	0
0	1	0	1
1	1	1	1

На входе первой колонки я поместил запись о логическом следовании в форме высказывания «Из α следует β», а на входе второй – импликацию, соответствующую высказыванию «Если α, то β».

Заметим, что и в одной, и в другой колонке отсутствует строка значений для α и β, в которой α истинно, а β ложно. Из таблицы мы уже знаем, что в её отсутствии импликация будет тождественно истинна, то есть она будет логическим законом. Попробуем воспользоваться этим обстоятельством. Примем условие общезначимости (тождественной истинности) импликации $\alpha \supset \beta$ как необходимое и достаточное условие логического следования вообще. Этот факт означает, что в процессе умозаключения (чтобы сохранить его правильность) логика «блокирует» единственный шаг – «потерю» истины по ходу вывода следствия из данных посылок (в нашем примере вывода β из α). Если мы умозаключаем логически правильно, то β не может быть ложным, когда истинно α. И это представляется очень естественным основанием для нашего соглашения.

Теперь очевидно, что данным соглашением отношение семантического логического следования мы свели к тождественной истинности (общезначимости) импликации, не занимаясь анализом действительной (содержательной) истинности посылок. (Напомню, что α и β – это буквы языка исследователя, обозначающие произвольные формулы.) И это единственное требование, которое мы здесь предъявляем к понятию «логическое следование»: если импликация $\alpha \supset \beta$ логически верна (этот факт мы условились обозначать записью $\models \alpha \supset \beta$), значит, можно вывести β из α.

Закрепим это соглашение в виде трёх явных определений:

***Определение* 3:** $\alpha \models \beta$, если, и только если $\models \alpha \supset \beta$.

***Определение* 4:** Пусть α и β произвольные формулы, а $p_1, \ldots, p_n$ все атомы, входящие в α или в β. Тогда $\alpha \models \beta$, если и только если всякий раз, когда α имеет табличную модель, β имеет *ту же самую* табличную модель.

***Определение* 5:** (обобщение) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \beta$, если и только если каждая табличная модель совокупности высказываний $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ является табличной моделью для β. (Или иначе, если $\models \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \supset \beta$.)

Из колонки для «$\models$» видно, что наше определение позволяет умозаключать (делать выводы) из ложных посылок и при этом выводить как ложь, так и истину.

Получить ложь, основываясь на лжи, – это как будто естественно. Но согласиться с определением, разрешающим выводить истину из лжи, кажется слишком. Такое определение у многих вызывает возражение[64]. Однако, вообще говоря, в самой возможности получить

[64] Те, кто не согласен с таким определением следования предлагают и другую трактовку импликации: строгую, модальную, релевантную и пр.

истинный результат, основываясь на ложной посылке (или посылках) нет ничего необычного. Всё дело в том, что в таких умозаключениях ложная посылка является, по существу, посторонней. Достаточно вспомнить об одной ошибочной лемме А.Лебега, из которой им была получена истинная теорема об обратимости аналитически представимых функций. Ложность этой леммы обнаружил М.Суслин. Однако он не отказался от проверки справедливости полученного из неё следствия. И в результате возникло новое направление исследований, получившее название «теория аналитических множеств».

Замечание 7. Остаётся только удивляться проницательности Аристотеля, который, создавая логику, предусмотрел отмеченную выше возможность вывода истины из ложной посылки. Замечу, что в своей силлогистике он предусмотрел и другую, для современной логики не менее важную вещь – возможность косвенных умозаключений путём приведения к противоречию, например, к заведомой лжи. Об этом немного уже говорилось выше, но сейчас это полезно уточнить в виде ещё одного определения логического следования:

Определение 6. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \models \beta$, если и только если $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \neg \beta \models 0$.

Заметим, что в этом определении 0 (ноль) мы могли бы заменить любой противоречивой формулой, например, $p \& \neg p$, или просто писать *abs* в качестве обозначения лжи любого вида. Отметим также, что в нём вообще нет импликации и, следовательно, ссылки на законы логики. Это неудивительно, поскольку как мы увидим далее, логическое доказательство возможно и без ссылок на эти законы (так называемое натуральное представление умозаключений). Но вот обоснование этого определения всё же предполагает ссылку на принцип дедукции, согласно которому отношение логического следования, вообще говоря, сводится к кратным импликациям: $\models \alpha_1 \supset (\alpha_2 \supset (...(\alpha_n \supset \beta))...)$, что указывает на присутствие логических законов *in concreto* в любом логическом доказательстве.

3.13. Нормальные формы логических функций

Выше мы познакомились с проблемой разрешения «для истинности» посредством истинностных таблиц. Иначе говоря, мы знаем теперь, что если нам дана некоторая формула, то, в соответствии с числом входящих в неё различных атомов, мы можем построить таблицу и определить, какой столбец значений в этой таблице соответствует нашей формуле, то есть какова её присоединённая функция истинности. Алгоритмом, решающим эту задачу, послужил нам графический (табличный) метод истинностной оценки формул.

Поскольку мы уже связали каждую формулу с некоторой функцией истинности и указали алгоритм её поиска, возникает вопрос, можно ли решить обратную задачу: для каждой функции, заданной таблично, найти формулу, представляющую эту функцию?

Попробуем ответить на этот вопрос. Положим, что мы имеем некоторую функцию истинности от трёх пропозициональных букв (аргументов этой функции), представленную Таблицей 14:

Таблица 14

p	q	r	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Мы уже знаем, что (согласно **Таблице 3)** сказать что-нибудь, это всё равно, что сказать, что это что-нибудь истинно. В данном случае речь идёт о функции f, то есть о тех строчках **Таблицы 14**, на которых эта функция истинна. Естественно, что полная истинностная характеристика функции требует учесть все строчки таблицы. Таким образом, имеем следующую дизъюнкцию конъюнкций, все дизъюнктивные члены которой несовместимы между собой:

$$f(\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}) \equiv (\mathrm{p} \,\&\, \neg\, \mathrm{q} \,\&\, \mathrm{r}) \vee (\mathrm{p} \,\&\, \neg\, \mathrm{q} \,\&\, \neg\, \mathrm{r}) \vee (\neg\, \mathrm{p} \,\&\, \mathrm{q} \,\&\, \neg\, \mathrm{r}).$$

Воспользуемся случаем и договоримся о следующем сокращении. Так как конъюнкция и дизъюнкция вполне двойственны, то, в зависимости от задачи, какой-либо из этих символов при записи формул будем опускать. Это облегчит чтение записи. При этом условии имеем

$$f(\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}) \equiv (\mathrm{p} \neg \mathrm{qr}) \vee (\mathrm{p} \neg \mathrm{q} \neg \mathrm{r}) \vee (\neg \mathrm{pq} \neg \mathrm{r}).$$

Таким образом, мы установили, что для любой истинностной функции, ассоциированной с некоторой выполнимой формулой (а наше рассуждение можно повторить для любой такой функции), существует некоторая стандартная форма её представления. Эта форма имеет вид дизъюнкции элементарных конъюнкций. Она представляет функцию однозначным (каноническим) образом. Это означает, что две различные функции не могут быть представлены одной и той же такой формой: если формы различны, то различны и функции. Исключение составляют только формы тождественно ложных функций, поскольку для функции, сопряжённой с тождественно ложной формулой, дизъюнкция будет пустой.

Итак, мы указали способ, позволяющий по заданным таблично истинностным значениям функции построить формулу, представляющую эту функцию на языке логики высказываний. Теперь возникает другой вопрос: нельзя ли получить аналогичное представление для истинностных функций, заданных некоторой формулой, а не таблицей? Это важный вопрос. Во-первых, потому, что вид канонических формул, если такие формулы есть, зависит от языка, выбранного для их записи. Во-вторых, потому, что всех формул, представляющих ту или иную функцию необозримо много[65]. И, в-третьих, потому, что изучение функций бывает удобно заменить изучением представляющих их формул.

Оказывается, положительный ответ на поставленный выше вопрос был дан ещё раньше, чем возникла сама идея табличной оценки логических функций. И это вполне естественно, поскольку логика высказываний изначально создавалась как алгебра высказываний, и аналитические методы играли в ней решающую роль. В основе этих методов лежит идея тождественных преобразований, основанных на *принципе замещения*. Как отмечает Джевонс, для того «чтобы мы могли правильно доказывать и умозаключать, нам нужно обращаться с нашими символами согласно с основными законами тождества и различия»[66].

Напомню, что ещё аристотелева логика допускала три важных аналитических принципа – *принцип двузначности*, *перестановку посылок* ($\alpha \,\&\, \beta \equiv \beta \,\&\, \alpha$) и *двойного отрицания* ($\neg\neg\alpha \equiv \alpha$). Принцип двойного отрицания по существу уравнивал положительную и отрицательную манеру утверждения, раскрывая формальный (и циклический) смысл отрицания. Согласно этому принципу, любое чётное число идущих подряд отрицаний можно исключить из состава высказывания или, напротив, включить в его состав, не нарушая истинностного значения высказывания.

Но этих принципов (к тому же заявленных тогда только в силлогистике) было, конечно, недостаточно для реализации идеи тождественных преобразований применительно к логической алгебре. Буль (а ранее, видимо, Лейбниц) добавил к ним *принцип поглощения*, заметив, что алгебра логики – это алгебра без степеней. Это означает, что в ней действуют следующие тождества: $\alpha \,\&\, \alpha \equiv \alpha$, $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$ (законы

---

65 И табличный метод даёт положительный ответ на вопрос об идентификации функций.

66 *Джевонс Ст.* Основы науки. Тракта о логике и научном методе. СПб., 1881. С. 31.

поглощения). А из этих тождеств (с учётом *принципа двузначности*) непосредственно следуют, во-первых, $\alpha \& 1 \equiv \alpha$, $\alpha \vee 0 \equiv \alpha$; и, во-вторых, $\alpha \& 0 \equiv 0$, $\alpha \vee 1 \equiv 1$. И, в силу перестановочности: $1 \& \alpha \equiv \alpha$, $0 \vee \alpha \equiv \alpha$ и $0 \& \alpha \equiv 0$, $1 \vee \alpha \equiv 1$.

Затем к этим принципам, по рецепту средневековых схоластов, добавили *принцип редукции*, который мы представили выше в **Таблице 8.** Из этой таблицы, с учётом тождества $(\alpha \sim \beta) \equiv ((\alpha \supset \beta) \& (\beta \supset \alpha))$, почти очевидно, что операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания вполне достаточно, чтобы формулой нашей алгебры выразить любую мысль, подчиняющуюся принципу двузначности[67] .

Значение такой редукции трудно переоценить. Она позволяет использовать в логике все преимущества *принципа симметрии*. Для принципа отрицания это очевидно. Но не менее важна и возможность, ограничиться в формулировке высказываний только конъюнкцией и дизъюнкцией, ведь обе эти операции обладают симметрией инвариантности относительно преобразования взаимной замены: если в какой-либо формуле их поменять местами (заменить конъюнкцию дизъюнкцией, и наоборот), то снова получиться формула. В этом случае говорят также о двойственном характере этих операций. Существенно, что эта двойственность (симметрия) при операции раскрытия скобок, выражается в алгебре логики (в отличие от обычной алгебры) законностью двух *принципов дистрибутивности*:

$\alpha \& (\beta \vee \gamma) \equiv ((\alpha \& \beta) \vee (\alpha \& \gamma))$;

$\alpha \vee (\beta \& \gamma) \equiv ((\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma))$[68] .

Кроме того, указанный факт их симметрии лежит и в основе так называемого *принципа двойственности*: из тождества $\alpha \equiv \beta$, в котором нет других логических операций, кроме «&», «$\vee$», и «$\neg$», мы можем получить новое тождество, путём замещения (обмена местами) «&» на «$\vee$», и наоборот. Таким образом, каждой истинной формуле логики соответствует двойственная ей и тоже истинная формула[69] .

Пример 6. Из тождества $\neg (\alpha \vee \beta) \equiv (\neg \alpha \& \neg \beta)$ по принципу двойственности получаем новое тождество $\neg (\alpha \& \beta) \equiv (\neg \alpha \vee \neg \beta)$. Оба тождества классически верны, но конструктивно (интуиционистски) верным будет только первое тождество и часть второго в форме импликации $(\neg \alpha \vee \neg \beta) \supset \neg (\alpha \& \beta)$.

---

[67] Я оставляю в стороне проблему кванторной характеристики высказываний.

[68] Обращаю внимание на то, что при раскрытии скобок по законам дистрибутивности операция в скобках становится главной операцией полученной формулы.

[69] Принцип двойственности введён Э.Шрёдером в 1877 г. Заметим, что в данной его формулировке он справедлив только для классической логики.

В классической логике дополнением к принципу двойственности является *принцип противоположности*: из любого высказывания, в котором нет других логических операций, кроме «&», «∨», и «¬», контрадикторно противоположное ему получаем простым взаимным обменом конъюнкций и дизъюнкций, всюду, где они встречаются в данном высказывании, при одновременном отрицании всех его пропозициональных букв[70].

Перечисленных принципов уже достаточно, чтобы с логическими формулами (высказываниями) обращаться так же, как с формулами обычной алгебры. При этом открывается возможность представить каждую формулу (и соответствующую ей функцию) в некоторой стандартной (канонической) форме, которую обычно называют *нормальной формой* этой формулы.

В виду важности нормальных форм остановимся на них подробнее.

Назовём конъюнкцию пропозициональных букв, в которой нет других операций, кроме, возможно, отрицания, *элементарной конъюнкцией*. По определению, элементарной будет любая (в том числе и бесконечная) конъюнкция пропозициональных букв с отрицаниями или без отрицаний. И, по определению, отдельная пропозициональная буква – это тоже элементарная конъюнкция. Двойственным образом назовём *элементарной дизъюнкцией* любую дизъюнкция пропозициональных букв с отрицаниями или без отрицаний. Заметим, к слову, что состав элементарных конъюнкций (соответственно дизъюнкций) для данной формулы, вообще говоря, с учётом фиктивных аргументов, не определён однозначно.

Примем без доказательства (хотя на самом деле имеет место *алгоритм нормализации*), что любую формулу логики высказываний можно представить либо в форме конъюнкции элементарных дизъюнкций либо, соответственно, в форме дизъюнкции элементарных конъюнкций, причём любое такое представление будет тождественно равным данной формуле.

Назовём первое представление *нормальной конъюнктивной формой* (н.к.ф.), а второе, соответственно, *нормальной дизъюнктивной формой* (н.д.ф.) данной формулы.

С примером нормальной дизъюнктивной формы мы уже встретились выше, когда решали задачу поиска формулы для функции, заданной таблично. Замечу, однако, что тогда нас интересовала не любая нормальная форма, а такая, которая бы представляла нашу функцию однозначным образом. Такие формы называют *совершенными нормальными формами* (с.н.ф.). У каждой функции, за исключением тождественно истинных и тождественно ложных, их имеется в

[70] В результате возможна, конечно, итерация отрицаний.

точности две – одна совершенная нормальная дизъюнктивная (с.д.н.ф.) и одна совершенная нормальная конъюнктивная форма (с.н.к.ф.). Тождественно истинная функция не имеет с.к.н.ф., а тождественно ложная – с.н.д.ф.

Объяснимся подробнее.

Для примера рассмотрим функцию, ассоциированную с формулой импликации $\alpha \supset \beta$. Из **Таблицы 8** мы уже знаем, что эту формулу можно тождественно преобразовать в формулу $(\neg\, \alpha \vee \beta)$. Это её нормальная дизъюнктивная форма. Но эта форма характеризует нашу функцию неоднозначно. В самом деле, её можно расширить, конъюнктивно приписав к ней тождественно истинную формулу $(\alpha \vee \neg\, \alpha)$ на основании принципов, отмеченных выше. Если мы теперь, пользуясь законом дистрибутивности, раскроим скобки, то получим другую нормальную дистрибутивную форму этой функции, а именно $\neg\, \alpha \vee (\beta \;\&\; \alpha) \vee (\beta \;\&\; \neg\, \alpha)$. Как видим, однозначности мы пока не получили, так что вопрос остаётся.

Для ответа на него обратимся к примеру той нормальной формы, с которой мы встретились в начале этого параграфа. Эта нормальная дизъюнктивная форма отличается тем, что, представляя собой дизъюнкцию всех табличных моделей (ТМ) данной функции, она даёт полную и однозначную информацию о том, какие значения мы должны приписать аргументам нашей функции, чтобы получить для неё истинностное значение «истина». Это с.н.д.ф.

По этой форме можно без труда найти и совершенную конъюнктивную форму этой функции (с.н.к.ф.). Для чего необходимо дизъюнктивно соединить все те (и только те) ПТМ, которые не вошли в число её ТМ (в число членов с.н. д.ф.), а затем произвести отрицание этой нормальной формы.

Опишем теперь основные признаки совершенных нормальных форм.

***Определение* 7.**

Совершенной дизъюнктивной (соответственно, конъюнктивной) нормальной формой (сокращённо с.д.н.ф. и с.к.н.ф.) функции истинности является такая нормальная форма, в каждой дизъюнктивной (соответственно, конъюнктивной) составляющей которой (её называют также *конституентом*) представлены все не фиктивные аргументы (пропозициональные буквы) этой функции с отрицаниями или без отрицаний только один раз, и каждая дизъюнктивная (соответственно, конъюнктивная) составляющая этой формы встречается тоже только один раз.

Замечу, что обе формы определены с точностью до порядка членов их составляющих дизъюнкций и конъюнкций, то есть порядок последних и порядок аргументов в них не принимается во внимание.

Впрочем, вообще говоря, можно принять во внимание и порядок, например, лексикографический или по числу отрицаний в аргументах. Но, в силу законов коммутативности, это не повлияет на истинностные значения данных форм.

Таким образом, согласно ***Определению* 7**, если две какие-либо формулы, представляющие функции истинности, имеют различные совершенные нормальные формы, то и функции, ассоциированные с этими формулами, будут различны. Не случайно эти формы называют *совершенными*.

Пример 7. Посмотрим теперь, какая функция соответствует формуле $(\alpha \supset \beta)\ \&\ (\beta \supset \gamma)$. Для этого построим для нее табличку:

Таблица 15

α	β	γ	$(\alpha \supset \beta)$	$(\beta \supset \gamma)$	$(\alpha \supset \beta)\ \&\ (\beta \supset \gamma)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Найдём с.д.н.ф. этой функции по табличке. По прошлому опыту мы уже знаем, как это сделать. Надо связать дизъюнктивно все ТМ этой функции. В данном случае их четыре: в первой, второй, четвёртой и восьмой строке. Таким образом, можно записать тождество:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \equiv (\neg\, \alpha \neg\, \beta \neg\, \gamma) \vee (\neg\, \alpha \neg\, \beta\gamma) \vee (\neg\, \alpha\beta\gamma) \vee (\alpha\beta\gamma).$$

Легко заметить, что максимальное число ТМ данной функции равно числу строк таблицы. То есть, если соответствующая формула содержит n различных пропозициональных букв (в данном случае их три), то число её ТМ $\leq 2^n$. Замечу, что члены с.н.ф. обычно называют не табличными моделями, а упомянутыми выше конституентами.

Имея таблично определённую с.д.н.ф. функции, попробуем теперь по данной форме найти с.к.н.ф. этой же функции. Для этого воспользуемся принципом двойного отрицания. Найдём сначала с.д.н.ф. функции (контрадикторно) противоположной данной, для чего свяжем дизъюнктивно конституенты этой функции (соответствующие тем строкам таблицы, где стоят нули), а затем снова произведём отрицание по правилам, указанным в **Таблице 8**.

Пример 8. Функцией, контрадикторно противоположной предыдущей, будет функция, ассоциированная с формулой $\neg ((\alpha \supset \beta) \,\&\, (\beta \supset \gamma))$. Согласно **Таблице 15,** её с.д.н.ф. имеет четыре ТМ (конституента), представленных третьей, пятой, шестой и седьмой строкой таблицы. Запишем эту с.д.н.ф.

$$\neg f(\alpha, \beta, \gamma) \equiv (\neg \alpha\beta \neg \gamma) \vee (\alpha \neg \beta \neg \gamma) \vee (\alpha \neg \beta\gamma) \vee (\alpha\beta \neg \gamma).$$

Второе отрицание этой функции, то есть отрицание левой и правой части данного тождества (по законам, представленным в **Таблице 8**), даёт искомую с.к.н.ф.

Задание 5. Найти указанную с.к.н.ф. самостоятельно.

Как видим, если дана таблица функции, то найти её с.д.н.ф. совсем легко. Однако в случае сложных формул (функций), зависящих от большого числа параметров такой метод неудобен, поскольку в этом случае трудность заключается в построении таблицы.

Более простой (аналитический) способ нахождения какой-либо совершенной нормальной формы функции мы получим, если воспользуемся любой нормальной формой этой функции и правилом конъюнктивного умножения на формулу $\alpha \vee \neg \alpha$ (когда речь идёт о членах к.н.ф.) или дизъюнктивного умножения на формулу $\alpha \,\&\, \neg \alpha$ (когда речь идёт о членах д.н.ф.).

Эти формулы нам встречались в начале очерка. Одна из них представляет тождественную истину, а другая тождественную ложь. Мы заметили тогда, что к любой данной формуле можно конъюнктивно присоединить тождественную истину, а дизъюнктивно – тождественную ложь.

Кроме того, следует воспользоваться обратной операцией:

– истинный член конъюнкции (соответственно, ложный член дизъюнкции) всегда можно исключить;

– если какой-либо член конъюнкции или дизъюнкции встречается в записи нормальной формы несколько раз, его (по законам поглощения) можно писать только один раз.

В результате, если в каких-либо членах нормальной формы недостаёт какого-либо аргумента нашей функции, мы расширяем эти члены согласно указанным выше правилам. Эту операцию называют иногда *дополнением до конституента.* И она вполне согласуется с нашим обычным мышлением. Так, если речь идёт о конъюнкции, и если высказывание α верно, то либо α и β верно, либо α и не-β верно. Очевидно, что, добавляя в члены исходного выражения недостающие буквы (аргументы), мы как бы раздваиваем их, присоединяя к ним недостающую букву один раз с отрицанием, а в другой раз без отрицания.

Пример 9.

Вернёмся к формуле $(\alpha \supset \beta)$ & $(\beta \supset \gamma)$. Найдём её с.д.н.ф., не прибегая к таблице. Для начала преобразуем эту формулу, в тождественную ей нормальную форму, исключив импликацию, и приняв условие, обозначать конъюнкцию пробелом. Наша формула примет следующий вид $(\neg\, \alpha \vee \beta)\ (\neg\, \beta \vee \gamma)$.

Теперь проведём необходимые преобразования по правилам, указанным выше:

1. $(\neg\, \alpha \vee \beta)\ (\neg\, \beta \vee \gamma) \equiv$
2. $(\neg\, \alpha \neg\, \beta \vee \beta \neg\, \beta \vee \neg\, \alpha\gamma \vee \beta\gamma) \equiv$ (раскрываем скобки),
3. $(\neg\, \alpha \neg\, \beta \vee \neg\, \alpha\gamma \vee \beta\gamma) \equiv$ (удаляем тождественную ложь),
4. $\neg\, \alpha \neg\, \beta\ (\gamma \vee \neg\, \gamma) \vee \neg\, \alpha\gamma\ (\beta \neg\, \beta) \vee \beta\gamma\ (\alpha \vee \neg\, \alpha) \equiv$ (добавляем недостающие буквы),
5. $\neg\, \alpha \neg\, \beta\gamma \vee \neg\, \alpha \neg\, \beta \neg\, \gamma \vee \neg\, \alpha\beta\gamma \vee \neg\, \alpha\gamma \neg\, \beta \vee \alpha\beta\gamma \vee \neg\, \alpha\beta\gamma \equiv$ (раскрываем скобки),
6. $\alpha\beta\gamma \vee \neg\, \alpha\beta\gamma \vee \neg\, \alpha \neg\, \beta\gamma \vee \neg\, \alpha \neg\, \beta \neg\, \gamma$ (удаляем повторы).

Полученное выражение и является с.д.н.ф. данной формулы.

Теперь найдём её с.к.н.ф. Шаги преобразований те же, кроме одного. Теперь уже дизъюнкцию мы будем обозначать пробелом. Это допустимо в силу двух законов дистрибутивности. Итак,

1. $(\alpha \supset \beta)$ & $(\beta \supset \gamma) \equiv$
2. $(\neg\, \alpha\beta)$ & $(\neg\, \beta\gamma) \equiv$
3. $\neg\, \alpha\beta\ (\gamma\ \&\ \neg\, \gamma)\ \&\ \neg\, \beta\gamma\ (\alpha\ \&\ \neg\, \alpha) \equiv$
4. $\neg\, \alpha\beta\gamma\ \&\ \neg\, \alpha\beta \neg\, \gamma\ \&\ \alpha \neg\, \beta\gamma\ \&\ \neg\, \alpha \neg\, \beta\gamma$.

На этом преобразование заканчивается. Выражение, полученное на шаге 4, будет искомой с.к.н.ф. формулы $(\alpha \supset \beta)$ & $(\beta \supset \gamma)$.

Задание 6. Пользуясь табличным методом, проверить полученный выше результат.

Замечу, что при операции дополнения до конституентов в дополняемых членах могут отсутствовать два, три и т.д. аргумента (пропозициональных буквы). В этом случае число членов, подлежащих раздвоению на следующем шаге, и, следовательно, число умножений (дистрибутивных операций) увеличивается, соответственно, в два, три и более раза. Ситуация существенно упрощается, если воспользоваться с.н.ф. тождественно истинной или тождественно ложной функции, составленной из недостающих (дополняемых) аргументов. Когда речь идёт о к. н. ф., то к дополняемым её членам дизъюнктивно присоединяется с.к.н.ф. тождественно ложной функции. Если же дополняются члены д.н.ф., то к ним конъюнктивно присоединяется с.д.н.ф. тождественно истинной функции.

Если нам уже дана к.н.ф. какой-либо функции, то для нахождения её с.н.ф. можно поступить следующим образом:

Выписываем все ПТМ данной функции (то есть все возможные комбинации пропозициональных букв, входящих в данную к.н.ф.). Выбираем те, и только те из них, которые содержат вхождение какого-либо члена нашей к.н.ф. Конъюнкция всех таких ПТМ и будет искомой с.к.н.ф.

Пример 10. Пусть некоторая функция представлена в к.н.ф., имеющей следующий вид: f (p, q, r) ⇔ pq & ¬ pqr & ¬ qr.

Выписываем все возможные конституенты (возможные ПТМ) этой функции. Всего их восемь: pqr, pq ¬ r, p ¬ qr, p ¬ q ¬ r, ¬ pqr, ¬ pq ¬ r, ¬ p ¬ qr, ¬ p ¬ q ¬ r. А затем производим попарное сравнение членов к.н.ф. с каждым из членов списка ПТМ, выбирая те из членов этого списка, в которые входят члены к.н.ф.[71] . Выбранные члены списка соединяем конъюнктивно: pqr & pq ¬ r & ¬ pqr & p ¬ qr & ¬ p ¬ qr. Полученная конъюнкция и будет искомой с.к.н.ф. данной функции.

Итак, мы познакомились с нормальными формами логических функций. Возникает вопрос: зачем же нужны эти формы?

Ответим на этот вопрос поэтапно.

3.14. Нормальные формы и оценка истинностных значений

Для начала напомню, что проблема логического следования является для логики её основной проблемой, что это проблема получения следствий из данных посылок и что она имеет два аспекта – семантический и синтаксический. В известном смысле оба аспекта независимы друг от друга, поскольку в первом связь посылок и следствий фиксируется через их отношение к некоторой «действительности», о которой в них идёт речь, а во втором действительность по существу игнорируется и заменяется формой и правилом. Однако при внимательном анализе именно семантические соображения служат мотивировкой для выбора аксиом (посылок) и правил вывода всех, или почти всех, «чистых» (неинтерпретированных) логических исчислений, порождая относительный (к целям формализации) характер тех или иных средств (правил) вывода. Во всяком случае, любой формализм должен отвечать интуитивному («житейскому») пониманию логического следования – из истинных посылок должны выводится только истинные следствия.

---

[71] Точнее надо было бы говорить об отождествлениях членов к.н.ф. и членов списка ПТМ по вхождениям комбинаций соответствующих пропозициональных букв.

И в нашем случае, как мы его описали выше, проблема разрешения (однозначный ответ на вопросы «да» или «нет») для логического следования предполагает, что параметром соответствующего алгоритма являются формулы, а значением параметра истинностное значение этих формул. При этом ответ «да» непосредственно связан с понятием логического закона, или, что почти то же, с понятием тождественной истинности формул.

Выше мы предложили семантический (табличный) метод для нахождения истинностных значений логических формул. Однако, после знакомства с чисто алгебраическим аспектом преобразования этих формул, естественно появился вопрос, нельзя ли использовать и синтаксический (алгебраический) метод для той же цели, то есть для выяснения того, к какому классу формул (общезначимых, выполнимых или противоречивых) относится та или иная логическая формула.

Естественно, что в контексте проблемы логического следования наиболее важным является вопрос о тождественной истинности, поскольку, как мы помним, теоретически этот вопрос мы уже свели к вопросу о тождественной истинности (общезначимости) определённого вида (импликативной) формулы.

Теперь, после знакомства с понятием к.н.ф., алгебраический ответ на вопрос о тождественной истинности той или иной формулы становится почти очевидным. Проверить формулу на тождественную истинность можно с помощью к.н.ф.

Если (и только если) к.н.ф. какой-либо формулы логики высказываний такова, что в каждой конъюнктивной её составляющей (в каждом её *дизъюнкте*) имеются, по крайней мере, два взаимно противоречивых атома (то есть, по крайней мере, два вхождения одной и той же пропозициональной буквы такие, что одно из них с отрицанием, а другое без отрицания), то эта формула является тождественно истинной.

В самом деле, в этом случае каждая конъюнктивная составляющая (дизъюнкт), полученной к.н.ф., представляет собой одну и ту же тождественно истинную логическую функцию. Следовательно, тождественная истинность всей к.н.ф. сводится к её дизъюнкту, а он является тождественно истинным.

Задание 7. Докажите необходимость и достаточность сформулированного выше условия.

Пользуясь общей темой этого параграфа, замечу, что таблицы и приведение пропозициональных выражений (высказываний) к нормальным формам это не единственные разрешающие методы (алгоритмы) их истинностной оценки. Кажется, в логической алгебре по времени они самые первые, и некоторые более позднее методы их предполагают, поскольку основываются на них. Но другие имеют самостоятельный характер. Из таких алгоритмов любопытны, в частности, *алгоритм Куайна* и *алгоритм редукции*.

Алгоритм Куайна[72] можно назвать последовательным тестированием функций по их пропозициональным аргументам путём их частичной интерпретации. В самом деле, рассмотрим формулу $p \supset (q \supset p)$. Она содержит две пропозициональных буквы p и q. Условимся о лексикографическом порядке их тестирования, то есть в данном случае начнём с приписывания значений букве p. Пусть этим значением будет 1. Тогда интерпретация нашей формулы сведётся к формуле $(q \supset 1)$. Теперь, как бы мы ни интерпретировали q, импликация будет истинной. Импликация останется истинной и в том случае, если мы положим p ложным (то есть равным нулю). Таким образом, наш анализ показывает, что данная формула тождественно истинна.

Алгоритм редукции основан на методе, о котором мы говорили выше. Он носит название *reductio ad absurdum*. Этим методом пользовался ещё Аристотель. Идея проста. Сначала допустить, что данная формула (система посылок) ложна, а затем доказать, что это противоречит необходимой для этого интерпретации соответствующих частей данной формулы (её подформул).

Пример 11.

Рассмотрим формулу $(\alpha \supset \beta)\ \&\ (\gamma \supset \beta) \supset (\alpha \vee \gamma) \supset \beta$, которую в традиционной логике называют простой конструктивной дилеммой. Предположим, что эта формула при некоторых значениях её пропозициональных букв ложна. Это импликация. А импликация ложна тогда (и только тогда), когда при истинности посылки ложно её заключение. Стало быть, импликация $(\alpha \vee \gamma) \supset \beta$ должна быть ложна, а конъюнкция $(\alpha \supset \beta)\ \&\ (\gamma \supset \beta)$ должна быть истинной. Условием ложности заключения является ложность β и истинность дизъюнкции $(\alpha \vee \gamma)$. Но это противоречит требованию (условию) истинности посылки нашей формулы (при данной интерпретации одна из её составляющих обязательно будет ложной).

И это ещё не все методы. О других мы будем говорить в четвёртой беседе.

Здесь стоит, однако, сказать, что проблема тождественной истинности высказываний является, по сути, внутренним делом так называемой «чистой» логики. Тождественно истинные высказывания (её теоремы) лишь «по видимости» описывают классы фактических си-

---

[72] *Quine W.V.* Methods of Logic. Rinchart and winston. Inc., 1972.

туаций, о которых говорят и которые составляют их «материю». Их настоящее значение в том, что каталогизированные в те или иные логические системы, они непротиворечиво вписываются в любую отрасль человеческого знания, образуя его «логическую ткань», – основу для формы сказывания, для того «как сказать», а не для того «что сказать». Другими словами, совокупность тождественных истин образует своего рода «кодекс» логически оправданных схем рассуждений, готовых для применения в любых сферах интеллектуально деятельности.

Вместе с тем вне рамок логики мы ценим, прежде всего, высказывания, которые описывают фактические истины. И если логические (тождественные) истины беспредпосылочны, о чём свидетельствует нам *принцип дедукции*, то все фактические истины (высказывания), напротив, открыты как бы в обе стороны. По крайней мере, всегда имеется что-то нетривиальное, что им предшествует (гипотеза), и что-то, также нетривиальное, что из них следует. Напротив, тавтологии, как говорят обычно, вытекают (следуют) из пустого множества посылок (гипотез), а в качестве их следствий могут быть только тавтологии. Логика, в отличие от естествознания, заявляет себя беспредпосылочной (абсолютной) наукой. И весь вопрос в том, насколько это ей удаётся.

Понятно, однако, что в сфере собственных приложений (даже если речь идёт о математике) логика не может игнорировать то обстоятельство, что в её приложениях важную роль играют выполнимые высказывания в узком смысле, то есть высказывания не общезначимые, но фактически истинные. Выше мы упомянули о них лишь коротко. Теперь, в связи с общей темой этого параграфа, попробуем определить логическую роль с.н.ф. по отношению к выполнимым высказываниям. Я постараюсь показать, что если эти формы и имеют какой-либо логический смысл, то только по отношению к этим высказываниям.

В подтверждение этому рассмотрим формулу $(\alpha \supset \beta) \supset (\neg \beta \supset \neg \alpha)$.

Если мы построим для неё таблицу и выпишем все её ТМ (миры её истинности), то увидим, что этих ТМ столько же, сколько и строк в таблице, то есть, соответственно, число ПТМ равно числу ТМ данной формулы. Это характерная черта всех тавтологий (тождественно истинных формул). Очевидно, что, соединив дизъюнктивно все эти ТМ, мы получим с.д.н.ф. данной тавтологии.

Рассмотрим теперь другую формулу, например $\neg \alpha \supset (\alpha \supset \beta)$. Её таблица, по сути, совпадает с таблицей предыдущей формулы. У обеих таблиц общее всё, что касается вида и числа ПТМ и ТМ. Следовательно, с.д.н.ф. первой формулы в точности совпадает с с.д.н.ф. второй формулы. Так происходит потому, что с.н.ф. однозначно характеризует не формулу как таковую, а логическую функцию, соответствующую этой формуле. Если каждая из двух различных формул представляет тавтологию, то очевидно, что соответствующие им логические функции тождественны с точностью до числа и графики их аргументов. Следовательно, все логические функции тождественно истинных формул естественно разбиваются на классы равных по числу аргументов с точностью до их графики. Этой тривиальностью мы обязаны принципу абстракции.

Напомню, что члены с.д.н.ф. обычно называют гипотезами тех формул, для которых они являются условиями истинности, или иначе, по отношению к которым эти члены служат их табличной моделью (ТМ). Иными словами, члены с.д.н.ф это различные возможности, при наличии которых данная формула является истинной [73].

Казалось бы, в этом нет ничего предосудительного. Но такое толкование может сбить с толку, когда речь идёт о тавтологиях. Ведь ни одна тавтология не зависит от распределения значений истинности по её аргументам. Следовательно, если множество гипотез для неё пустое, говорить о гипотезах для тавтологий в *методологическом* значении слова «гипотеза» не имеет смысла. И это верно не только для классической логики, но для всех логических систем, в которых действует принцип *ex falso sequitur qoodlibet.*

В аристотелевской силлогистике в разделе об условных суждениях гипотеза – это антецедент (предпосылка) условного суждения. Но в силлогистике нет материальной импликации. Условное суждение в ней обычно понимается как связь основания и следствия, то есть как импликация формальная. И такое толкование вполне соответствует толкованию термина «гипотеза», которое сложилось в методологии науки в Новое время. Гипотезу мы предлагаем, но не имеем права утверждать, хотя она и заполняет пробелы в нашем познании. Гипотеза антиципирует факты, но именно факты должны служить оправданием гипотезы. В этом смысле гипотеза – это непосредственный участник эксперимента. А что касается тавтологий, то по отношению к ним слово «гипотеза» лишено вопросительного смысла, аромата условности, тайны предугадывания причинной связи, вероятной истинности суждения о действительном положении вещей, выработанного, по словам Канта, под строгим надзором разума. По отношению к тавтологиям всякое высказывание есть гипотеза, а, следовательно, и ни одно.

---

[73] *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. М., 1947. С. 37.

Напротив, истинность высказываний (формул), выполнимых в узком смысле, всегда релятивизирована некоторой посылкой. Гипотеза (для некоторой формулы β) – это такая другая формула α, которая, если она истинна, обязательно влечёт истинность β. В этом случае импликация $\alpha \supset \beta$ будет общезначимой формулой (законом логики). Например, для выполнимого высказывания $p \vee q$ гипотезами будут как p, так и q. И действительно, в этом случае мы имеем два закона логики: $p \supset p \vee q$ и $q \supset p \vee q$.

Между прочим, замечу, что по отношению к выполнимым формулам роль «поставщика» гипотез данного вида (содержащих только отмеченные аргументы соответствующей функции) играют все д.н.ф. Но с.д.н.ф. представляют собой своего рода банк их *полной обозримости*. Если привести какое-либо высказывание (формулу) к с.д.н.ф., то для выявления (нахождения) *всех* гипотез данного вида достаточно брать её конъюнктивные члены сначала по одному, затем по два, по три и т.д.

Подытожим теперь эту ситуацию в коротком определении:

Если некоторую формулу (некоторое высказывание) привести к с.д.н.ф., то всякая дизъюнкция любого числа конституентов этой формулы (этого высказывания) представляет собой гипотезу данной формулы (данного высказывания) и никакое другое выражение, содержащее только данные элементарные пропозициональные буквы и не эквивалентное ни одной из упомянутых выше дизъюнкций, не является гипотезой этой формулы.

Теперь обратимся к с.к.н.ф.

Кажется, что их роль более значительна, поскольку основная задача логики, выведение следствий из данных посылок. В частности, общий приём вывода следствий с помощью с.к.н.ф. таков:

Все данные посылки соединяем знаком «&» и для получившейся формулы (выражения) отыскиваем её с.к.н.ф. После чего, выбирая любые конституенты этой формы поодиночке или связывая их конъюнктивно (знаком «&»), получаем все следствия из данных посылок.

Объяснимся подробнее.

Выше (раздел **3.14**.) мы уже определили, когда некоторое высказывание (формула) является логическим следствием из других высказываний (формул). Добавим, что следствия делятся на отдельные дизъюнкты и конъюнкции дизъюнктов. Первые называют *непроизводными*, а вторые *производными*. Среди непроизводных можно выделить две группы: группу более сильных и группу более слабых следствий. Первые содержат в себе вторые как часть – они являются вхождениями во вторые. Например, дизъюнкт pq является вхождением в дизъюнкт pqr. Таким образом, из двух дизъюнктов более слабым является тот, который содержит больше пропозициональных букв. Из более слабого следствия всегда какие-то буквы можно исключить, и при этом оставшаяся часть по-прежнему будет следствием.

Общее правило: более сильное следствие *поглощает* более слабое. Например, следствие p поглощает следствия pq, $p\neg q$, $pq \,\&\, p\neg q$ и т.д.

Итак, пока что мы научились только ставить задачу о следовании по данным посылкам и данному (предполагаемому) следствию. Иначе говоря, мы научились методу *проверки*, но не методу *вывода* следствий из посылок. Задача теперь другая. С учётом того, что мы уже знаем, по данным посылкам (аксиомам) *вывести* все неэквивалентные между собой следствия, поскольку это возможно сделать, рассматривая только формулы, содержащие данные пропозициональные буквы.

Согласно нашим определениям (**Определения 3-5** раздела **3.14**), некоторое высказывание β будет логическим следствием из посылок $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ только тогда, когда высказывание $\alpha_1 \,\&\, \alpha_2 \,\&\, \ldots \&\, \alpha_n \supset \beta$ будет тождественно истинным (общезначимым) высказыванием, или логическим законом.

На простых примерах мы уже убедились, что если есть конъюнкция высказываний, то следствиями из неё будут все члены этой конъюнкции. Так, если мы имеем $\alpha \,\&\, \beta$, то обе формулы $\alpha \,\&\, \beta \supset \alpha$ и $\alpha \,\&\, \beta \supset \beta$ тождественно истинны. Вообще, если дана конъюнкция из *n* членов, то следствием её будет каждый её член. Следовательно, если мы имеем с.к.н.ф., то каждый член этой формы и любая конъюнкция её членов также будет её следствием, в том числе, конечно, и сама эта с.н.ф. (в силу закона тождества $\alpha \supset \alpha$).

Пример 12.

Рассмотрим формулу $(\alpha \supset \beta) \,\&\, (\beta \supset \gamma)$, которая нам уже встречалась в **Примере 8.** Тогда мы нашли, что её с.к.н.ф. имеет следующий четырёхчленный вид $\neg\alpha\beta\gamma \,\&\, \neg\alpha\beta\neg\gamma \,\&\, \alpha\neg\beta\gamma \,\&\, \neg\alpha\neg\beta\gamma$.

Выпишем последовательно все её следствия.

1) $\neg\alpha\beta\gamma$
2) $\neg\alpha\beta\neg\gamma$
3) $\alpha\neg\beta\gamma$
4) $\neg\alpha\neg\beta\gamma$
5) $\neg\alpha\beta\gamma \,\&\, \neg\alpha\beta\neg\gamma$
6) $\neg\alpha\beta\gamma \,\&\, \alpha\neg\beta\gamma$
7) $\neg\alpha\beta\gamma \,\&\, \neg\alpha\neg\beta\gamma$
8) $\neg\alpha\beta\neg\gamma \,\&\, \alpha\neg\beta\gamma$
9) $\neg\alpha\beta\neg\gamma \,\&\, \neg\alpha\neg\beta\gamma$
10) $\alpha\neg\beta\gamma \,\&\, \neg\alpha\neg\beta\gamma$

11) $\neg \alpha\beta\gamma \,\&\, \neg \alpha\beta \neg \gamma \,\&\, \alpha \neg \beta\gamma$

12) $\neg \alpha\beta\gamma \,\&\, \neg \alpha\beta \neg \gamma \,\&\, \neg \alpha \neg \beta\gamma$.

13) $\neg \alpha\beta\gamma \,\&\, \alpha \neg \beta\gamma \,\&\, \neg \alpha \neg \beta\gamma$.

14) $\neg \alpha\beta \neg \gamma \,\&\, \alpha \neg \beta\gamma \,\&\, \neg \alpha \neg \beta\gamma$.

15) $\neg \alpha\beta\gamma \,\&\, \neg \alpha\beta \neg \gamma \,\&\, \alpha \neg \beta\gamma \,\&\, \neg \alpha \neg \beta\gamma$.

16) Пустое следствие (или тождественно истинная формула согласно принципу *ex falso sequitur quodlibet*)[74] .

Итак, мы получили всего 16 следствий. Докажем, что это *все* следствия.

Для доказательства допустим, что есть ещё какое-то следствие нашей формулы, кроме перечисленных шестнадцати. Положим, что таким следствием является элементарная дизъюнкция $\alpha \neg \beta \neg \gamma$, которая не входит в нашу с.к.н.ф. В этом случае мы можем сделать так, чтобы наша формула (её с.к.н.ф.) стала истинной, а указанная дизъюнкция (наше предполагаемое следствие) ложной. Для этого достаточно выбрать следующую ПТМ: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$. В самом деле, наша с.к.н.ф. станет истинным высказыванием, поскольку каждый её конституент отличается от предполагаемого «следствия» тем, что, по крайней мере, для одной его пропозициональной буквы знак отрицания расположен иначе, чем в дизъюнкции $\alpha \neg \beta \neg \gamma$. А это означает, что (в силу *tertium non datur*) хотя бы одна буква в каждом из конституентов нашей с.к.н.ф. будет представлять собой истинное элементарное высказывание, так что и вся с.к.н.ф. будет истинной.

Задание 8. Проверьте это утверждение.

Однако естественно спросить, почему для своего доказательства в качестве контрпримера мы выбрали формулу, которая имеет вид конституента, но не входит в нашу с.к.н.ф. Ответ очевиден, если вспомнить, что с.к.н.ф. однозначно (единственным образом) представляет каждую не тождественно истинную формулу. Ведь логическим следствием любого высказывания (формулы) естественно считать такое, вообще говоря, другое высказывание, которое, будучи конъюнктивно прибавлено к первому, не изменяет сумму информации, содержащейся в этом первом высказывании. Другими словами, о логическом заключении естественно говорить тогда, когда для его получения не требуется новой дополнительной информации. И в этом как раз и состоит аналитический характер логических умозаключений.

---

[74] Я должен извиниться перед читателем за то, что здесь, равно как и в других местах, при описании формул я обычно пользуюсь буквами метаязыка там, где, строго говоря, необходим предметный язык. Надеюсь, однако, что читатель поймёт, где и в каких случаях греческие буквы представляют произвольные формулы, а где – пропозициональные буквы предметного языка.

К сказанному остаётся прибавить, что во-первых, если с.к.н.ф. какой-либо формулы (высказывания) содержит *n* членов (дизъюнктов), то всех следствий у этой формулы будет 2^n, и, что, во-вторых, в нашем представлении речь идёт о всех следствиях, неэквивалентных между собой. О том, что это значит в следующем разделе.

3.15. Нормальные формы и понятие простого следствия

Начнём с примера.

Пример 13.

Рассуждая вне всякой логики, нетрудно заметить из предыдущей формулы $(\alpha \supset \beta)$ & $(\beta \supset \gamma)$ одно простое следствие $\alpha \supset \gamma$. И вполне естественно задать вопрос, а есть ли это следствие среди тех шестнадцати следствий, которые мы перечислили выше, ведь мы утверждали, что это все следствия? На первый взгляд, если судить по графике, такой формулы там нет.

Однако, не будем спешить, и рассмотрим одно из этих шестнадцати следствий $\neg\,\alpha\beta\gamma\ \&\ \neg\,\alpha\,\neg\,\beta\gamma$. Это седьмое следствие. Пользуясь законом дистрибутивности, вынесем за скобку общий множитель $\neg\,\alpha\gamma$. Исключая тождественно ложный член, получим $\neg\,\alpha\gamma\,(\beta\ \&\ \neg\,\beta) \equiv \neg\,\alpha\gamma \equiv \alpha \supset \gamma$. Мы видим, что ответ положительный.

Надеюсь, идея ясна. Она в возможном эквивалентном преобразовании уже полученных нами следствий. В дальнейшем так мы и будем «читать» и анализировать наши следствия на основе этих преобразований.

Рассмотрим ещё один пример. Найдём все следствия формулы $\alpha\ \&\ (\alpha \supset \beta)$.

$\alpha\ \&\ (\alpha \supset \beta) \equiv \alpha\ \&\ \neg\,\alpha\beta \equiv \alpha\,(\beta\ \&\ \neg\,\beta)\ \&\ \neg\,\alpha\beta \equiv \alpha\beta\ \&\ \alpha\,\neg\,\beta\ \&\ \neg\,\alpha\beta$. Теперь выпишем их в столбик:

$\alpha\beta$

$\alpha\,\neg\,\beta$

$\neg\,\alpha\beta$

$\alpha\beta\ \&\ \alpha\,\neg\,\beta$

$\alpha\beta\ \&\ \neg\,\alpha\beta$

$\alpha\,\neg\,\beta\ \&\ \neg\,\alpha\beta$

$\alpha\beta\ \&\ \alpha\neg\,\beta\ \&\ \neg\,\alpha\beta$

любая тождественная истина (логический закон).

Проанализируем эти следствия.

Для начала, пользуясь понятием о *сильных* и *слабых* следствиях, введём порядок (не строгий) в мире следствий. Будем считать, по определению, что α более сильное следствие, чем β, если $\alpha \supset \beta$. Таким образом, в силу закона тождества ($\alpha \supset \alpha$) ни одно следствие не сильнее самого себя, а с.к.н.ф. является самым сильным следствием среди прочих.

Так же, по определению, введём понятие *простого* следствия. Будем считать следствие простым, если, во-первых, оно вообще является следствием данной системы посылок, и, во-вторых, если оно не поглощается (вспомним о законах поглощения!) никаким другим, более сильным, следствием. Это означает, что если следствие простое, то никакая его часть сама не является следствием. Например, если в числе следствий есть следствие вида α (как в нашем случае), то оно поглощает следствия вида $\alpha\beta$, $\alpha \neg \beta$, $\alpha\beta \& \alpha \neg \beta$, но само не поглощается никаким другим следствием.

Теперь, с этой точки зрения, проверим семь перечисленных выше следствий на соответствие введённым выше понятиям.

Очевидно, что 1 и 2 более слабые следствия, чем 4, 5 и 7. Но следствие 4 равносильно α, а следствие 5 равносильно β. Они более простые, чем 1, 2 и 3. Следствие 6, в силу 2 и 3, равносильно эквиваленции $\alpha \sim \beta$, а следствие 7 равносильно, что естественно, нашей исходной формуле.

На примере данного анализа мы видим, что всё, что вытекает из нашей посылки, вполне в ней содержится, так что *процедура вывода следствий является аналитической*. В некотором смысле члены с.к.н.ф. можно считать простыми следствиями, поскольку все остальные следствия получаются, если их соединять попарно, то есть брать по два, по три и т.д. Но, по определению, они не самые простые. Они содержат ещё слишком много пропозициональных букв. В нашем случае самыми простыми следствиями будут буквы α и β. Соединяя все простые следствия конъюнктивно, получаем то, что называют *силлогистическим многочленом* (или *приведённой нормальной формой*).

Теперь представим процесс получения простых следствий в виде алгоритма действий.

Определение 8 . Алгоритм нахождения простых следствий:

1. Приводим формулу (высказывание) к с.к.н.ф.

2. Производим все операции отбрасывания тождественно истинных и тождественно ложных членов:

2.1. $\alpha \& (\beta \vee \neg \beta) \equiv \alpha$; 2.2. $\alpha \vee (\beta \& \neg \beta) \equiv \alpha$.

3. К оставшемуся выражению применяем законы выявления:

3.1. $\alpha x \& \beta \neg x \equiv \alpha x \& \beta \neg x \& \alpha\beta$,

3.2. $\alpha x \vee \beta \neg x \equiv \alpha x \vee \beta \neg x \vee \alpha\beta$,

3.3. $x \& \beta \neg x \equiv x \& \beta \neg x \& \beta$,

3.4. $x \vee \beta \neg x \equiv x \vee \beta \neg x \vee \beta$.

4. Производим все поглощения:

4.1. $\alpha \& (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$,

4.2. $\alpha \vee (\alpha \& \beta) \equiv \alpha$.

5. Из повторяющихся членов оставляем один.

Путь к разысканию простых следствий можно существенно сократить, если воспользоваться *принципом исключения*: $\alpha p \& \alpha \neg p \equiv \alpha$, где α – произвольная формула[75]. Тогда необходимо лишь попарное сравнение соседних дизъюнктов, то есть таких, которые различаются лишь тем, что в один из них одна и та же пропозициональная буква входит с отрицанием, а в другой без отрицания.

Пример 14.

Имеем функцию в с.к.н.ф.: $f(p, q, r) \Leftrightarrow \neg pqr \& \neg pq \neg \rho \& prq \& pr \neg q$.

Ищем соседние дизъюнкты. Это первый и второй, третий и четвёртый соответственно. Для наглядности представим с.к.н.ф. в следующем виде:

$\alpha r \& \alpha \neg r \& \beta q \& \beta \neg q$.

Здесь $\alpha \Leftrightarrow \neg pq$, а $\beta \Leftrightarrow pr$.

Применяя принцип исключения, имеем: $\neg pq \& pr$.

Наконец, применяя тот же принцип ещё раз, имеем силлогистический многочлен $q \& r$ из двух однобуквенных дизъюнктов. Теперь, если мы вспомним, что каждый член конъюнкции является её следствием, мы можем добавить к числу простых следствий буквы q и r.

Итак, подведём итог. Скажем, что *простое следствие* – это дизъюнкт пропозициональных букв или их отрицаний такой, что он является следствием данной системы посылок и его не поглощает никакой другой дизъюнкт из числа данных следствий. Простые следствия – это самые сильные следствия.

Стоит, конечно, сказать, что для разыскания простых следствий необязательно приводить систему посылок к с.к.н.ф. Достаточно одной только к.н.ф. Поясню это примером.

Пример 15.

Пусть нам дана система посылок:

$(p \supset q)$, $(p \supset r)$, $\neg q \vee \neg r$.

Преобразуем её в к.н.ф.:

$(\neg p \vee q) \& (\neg p \vee r) \& (\neg q \vee \neg r)$.

Перепишем это выражение в удобной для преобразования форме:

$\neg pq \& \neg pr \& \neg q \neg r$.

К первому и второму члену этого выражения применим закон выявления. Получим:

$\neg pq \& \neg pr \& \neg q \neg r \& \neg p \neg r$.

[75] На самом деле это тождественная часть соседних дизъюнктов.

Применим закон выявления ещё раз. На этот раз ко второму и последнему члену нашей формулы. Получим:

$\neg pq \& \neg pr \& \neg q \neg r \& \neg p \neg r \& \neg p$.

Произведём сокращения (поглощения). Получим:

$\neg q \neg r \& \neg p$.

Это и есть искомый силлогистический многочлен (или приведённая нормальная форма).

3.16. Нормальная форма и понятие простой гипотезы

Симметричным к понятию простого следствия является понятие *простой гипотезы*. Это элементарная конъюнкция пропозициональных букв или их отрицаний (конъюнкт), никакая часть которой уже не является гипотезой, то есть попросту не поглощается какой-либо другой из гипотез. Алгоритм разыскания простых гипотез аналогичен алгоритму разыскания простых следствий, только первым шагом будет приведение выражения (высказывания) к нормальной дизъюнктивной форме.

* * *

На этом, пожалуй, можно и закончить нашу беседу. Добавлю всего лишь несколько слов. В последнее время тема нормальных форм в университетских учебниках логики, как правило, обходится стороной. Возможно, она считается устаревшей. Между тем, логика нормальных форм, более чем другие формы логического вывода, обнажает традиционный взгляд на дедукцию как на *dictum de omni* – переход от общего к частному. И в этом её дидактическое достоинство. Но главное в другом. Главное, во-первых, в том, что эта логика, может быть использована для доказательства полноты (в смысле непополнимости) логики высказываний и, во-вторых, что она прочно инкорпорирована в понятия и методы искусственного интеллекта. По крайней мере, *метод резолюций* предполагает близкое знакомство с логикой нормальных форм и высказываний, и предикатов[76].

[76] Подробно об этом в кн.: *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М., 1983.

Беседа четвёртая. О дедукции высказываний

> Если законно рассматривать логику *извне*, через её связь посредством числа с понятиями пространства и времени, то также законно рассматривать её *изнутри*, на основе понятий другого порядка, которые находят своё место в строении ума.
>
> *Дж. Буль*

4.1. О дедукции вообще

Прямого определения понятия «дедукция» в курсах логики, как правило, избегают. Признают, что это метод познания аподиктический, а потому основанный на непогрешимых правилах, следуя которым посредством дедукции «мы постигаем всё то, что с необходимостью выводится из некоторых других достоверно известных вещей»[77]. Реже ограничиваются контекстуальным объяснением либо используют термин «дедукция» со ссылкой на так или иначе организованную (аксиоматическую) структуру теории, как, например, в случае философии логицизма, которой «дедукция математики из логики была предложена в качестве интуитивной аксиоматики»[78]. В таком толковании дедукция представляется чем-то вроде процедуры сводимости, что и подтверждается обычным утверждением о сводимости математики к логике.

В философской же логике попросту следуют латинской традиции, определяя дедукцию в смысле принципа *dictum de omni* как вывод из общих гипотез. В особенности это практикуется в учебных пособиях иллюстрацией простого категорического силлогизма из логического фольклора:

Все люди смертны,
Кай человек.
Следовательно, Кай смертен.

---

[77] *Декарт Р.* Соч. Т. 1. М., 1989. С. 85.
[78] *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М., 1957. С. 47.

Конечно, это ещё не определение дедукции, а только пример из дедуктивного дискурса без объяснения специфики самой дедукции. Хотя сама идея всё же понятна, если обратить внимание на то, что́ мы получаем при ином (обратном) порядке приведённых выше высказываний:

Кай смертен,
Кай человек.
Следовательно, все люди смертны.

Это вариант зеркальной симметрии. И по замыслу он должен представлять собой *синтез*. Но мы ясно видим, что он лишён полноты предыдущего примера. Тем самым он действительно даёт нам *ad exemplum* объяснение разницы между дедукцией и индукцией. Как отмечал Декарт, дедукция, в отличие от индукции и интеллектуальной интуиции, не нуждается в *наличной очевидности*. Её аподиктичность не в истинностных значениях посылок и заключений (мы ведь не знаем, истинно ли, что все люди смертны, и потому не можем говорить об очевидности), а в их анализе, в их расстановке, в особенностях движения мысли. В первом случае мы ясно видим, как мысль идёт от общего к единичному (частному), а во втором – от единичного (частного) к общему. Только *бесконечная индукция* как будто избавляет мысль от этого противопоставления. Но в посылке бесконечной индукции общности (по крайней мере, абстрактно) не меньше, чем в её заключении. И в этом смысле её можно считать если не дедуктивным, то вполне аналитическим принципом мышления, согласующимся с конструктивной природой умозаключений[79].

Обычно считается, что демонстрации отношений «целого и части» вполне достаточно для первоначального знакомства с двумя антиподами мыслительного процесса – дедукцией (в первом случае) и индукцией (во втором), поскольку в традиционной логике (а, по сути, и в аристотелевской) все логические отношения между высказываниями сводятся к отношениям их объёмов. Последнее отмечал ещё Лейбниц, говоря, что «всё учение о силлогизме можно доказать на основании учения *de continente et contento*, о содержащем и содержимом»[80].

Думается, однако, что это как раз существенный дефект традиционной логики (теории силлогизма), на протяжении веков не позволивший ей двинуться дальше в развитии её формализма. Ведь обыч-

79 Очень подробно об этом см.: *Кузнецов А.В.* Бесконечная индукция // Философская энциклопедия. Т. 1. М. 1960.
80 *Лейбниц Г.В.* Новые опыты о человеческом разуме. М., 1936. С. 431.

ный способ формулировки суждений, как заметил тот же Лейбниц, относится к *индивидам* (логика предикатов), тогда как аристотелеский – к *универсалиям* (логика классов).

По-видимому, надо принять во внимание и справедливое замечание Рассела, что «случаи, в которых известен *объём*, являются исключениями»[81]. В связи с этим и возникает вопрос о полноте основания для объяснения правомерности самой дихотомии «дедукция–индукция». Хотя возможно, как говорил Кант, что это вопрос о праве (*quid juris*), а не вопрос о факте (*quid facti*).

Справедливости ради замечу, что впервые этим вопросом озаботился, видимо, сам Аристотель. Он не только усмотрел *логическую разницу* между приведёнными выше силлогизмами, но и разглядел в сократовской индукции, имевшей, на первый взгляд, чисто деструктивный характер, один из важнейших аргументов дедуктивного доказательства – *аргумент опровергающего примера* (контрпримера). Этот аргумент обеспечивает полностью дедуктивный характер умозаключения, хотя, опираясь на принцип единичной посылки, и создаёт видимость индукции[82].

Правда, чтобы заставить опровергающий аргумент «работать» в полную силу, необходима подходящая система правил. А это тема совсем другой эпохи[83].

Поэтому оставим эти тонкости пока в стороне.

Заметим, что если Аристотель открыл и описал дедукцию, то Евклид соединил дедукцию и аксиоматический метод. С тех пор понятия «дедукция» и «аксиоматический метод» для математиков превратились в синонимы. Форма изложения геометрии, которую ей придал Евклид, на протяжении столетий служила моделью дедуктивной теории и считалась «абстрактно-логической». Она служила и образцом дедуктивной теории, и образцом логического метода доказательства вообще, хотя Евклид, равно как и современный геометр, не пренебрегал «доказывающей манерой» древних – подчинять доказательства не только формально-логическому порядку, но и наглядной очевидности[84].

---

81 *Рассел Б.* Человеческое познание. М., 1957. С. 165.

82 За подробностями я отсылаю к ст.: *Beth E.W.* Uber Lockes «Allgemeines Dreick» // Kant-Studien. Bd. 48. Hft. 3. 1956–1957; и к моей книге: Абстракция в лабиринтах познания. Логический анализ. М., 2005. Гл. 9.

83 Такая система правил – это продукт современной логики. В частности, она представлена в методе семантических таблиц. См.: *Beth E.W.* On a certain System of Natural Deduction // Proceedings of the Section of Sciences, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. 1955. Vol. 58. Series A.

84 В качестве примера см.: *Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.* Геометрия. М., 1990.

Говорят, что «Элементы» писались Евклидом в эпоху «организации научного метода», когда дедуктивный взгляд на науку только формировался под влиянием философии Платона и Аристотеля. Но Евклид мог и не задаваться вопросом, насколько его способы доказательства отвечают методологическим установкам той или иной философской школы, поскольку античной наукой равным образом допускались и аксиоматический и конструктивный (генетический) способы организации теории. Та часть доказательства, которая называлась «изложением» (*ekthesis*), традиционно предполагала законную роль наглядной геометрии – обращение к примеру (*exemplum*), к чертежу, к пространственной интуиции (которые служили своего рода базисом индукции), чтобы затем, убедившись в справедливости частного случая (в справедливости рассуждения *in concreto*) посредством абстракции вернуться к общему положению, сформулированному в теореме.

Позднее теоремы стали считать идеальными объектами теории, поскольку, по выражению Прокла, они устанавливаются, невещественным и разумным путём. Ссылка на идеальность объектов теории, на экзистенциальный её характер в определённом смысле устраняла эмпирический элемент из состава доказательства и (в этом смысле) индуктивную суть теории.

Но Евклид, по-видимому, не приписывал идеального характера своим геометрическим фигурам, как это делали позднейшие его комментаторы, и как это делал Платон. Для Евклида возможность «существования... обусловливалась признанием возможности... построения»[85]. И в этом факте уже содержался залог подлинно аналитического обоснования того перехода от частного к общему, которое нередко делает Евклид. Как заметил Пуанкаре, конструирование – это «процесс чисто аналитический, однако он направлен не от общего к частному»[86].

Такая точка зрения даёт мне повод ещё раз обсудить тему логической разницы между дедукцией и индукцией. Будет ли эта разница в мысленном пути от общего к частному, как это представляется в традиционном определении дедукции, или, напротив, в пути от частного к общему, как это утверждают в случае индукции. Хотя этот признак – движение «сверху вниз или снизу вверх» – и наиболее наглядный, есть мнение, что он не является определяющим. Он не выражает *differentia* обоих методов и не определяет их границы.

---

85 *Мордухай-Болтовской Д.Д.* Комментарии... // Начала Евклида. Кн. 1. М.–Л., 1950, С. 238.

86 *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983. С. 20.

О том, что это действительно ещё остаётся проблемой, говорят два важных вопроса, которые поставил Анри Пуанкаре: если математика полностью дедуктивна, то «каким образом математика не сводится к бесконечной тавтологии?», а если «математический метод ведёт от частного к общему», то «каким образом можно назвать его тогда дедуктивным?»[87].

По-моему и вопросы, поставленные Пуанкаре, и его замечание об *аналитической, но недедуктивной* природе конструирования заслуживают особого внимания в контексте современных представлений о логике как совокупности логических исчислений. Во всяком случае, исчисленческий аспект логики ставит под сомнение если не саму идею дедукции, то метрический смысл понятия «вывод от общего к частному». В современных логических исчислениях дедукция является скорее *топологическим* понятием, чем метрическим.

Это объясняется тем, что различие между аксиомой и теоремой, по крайней мере в логике высказываний, фактически стёрто в силу тавтологического характера обеих. А бесконечность и полнота класса тавтологий позволяет предположить обратимый характер отношений между общезначимыми формулами логического языка. Иными словами, начало и конец дедукции в пропозициональной логике относительны. Теорема одного исчисления может оказаться аксиомой другого, и наоборот. Объёмов в их эмпирическом смысле в современной логике нет[88]. При любых допустимых (в данном исчислении) преобразованиях высказываний сохраняются только свойство общезначимости и *идея порядка*, представленная тем или иным их импликативным отношением. Правда, не все логические исчисления эквивалентны. Но это касается только классов формул, демонстрирующих принципиально различные отношения между формулами и, соответственно, различную их топологическую организацию (структуру).

Можно, конечно, возразить: а как же всё-таки быть с понятием импликации и следования? Ведь есть же понятие следствия, как мы его определили в предыдущей беседе, когда занимались проблемой выведения следствий из данных посылок. И тогда мы говорили об имплицитном (информационном) содержании следствий в посылках, что явно напоминает их отношение по объёму.

---

87 *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983. С. 11–12.

88 Можно, правда, сказать, что они имеют один и тот же объём, совпадающий с собственным универсумом классической логики. О понятии «собственный универсум логики» см. параграф 5.4 пятой беседы.

Отвечая на это возражение, можно сказать, что в чистой логике понятия «посылка» и «заключение», вообще говоря, зависят только от их взаимного положения, которое определяется изначально заданным порядком при построении исчисления, даже если этот порядок и не обозначен явно. В предыдущей беседе мы отметили это, указав, что понятие гипотезы по отношению к тавтологиям не имеет смысла. В этом случае различие идёт не по объёму, а по характеру (дедуктивным особенностям) логических связок, поскольку мы можем говорить о дедукции (или порядке) не только высказываний, но и о дедукции на связках. Примером может служить конъюнкция, которая дедуцирует дизъюнкцию ($\& \vdash \vee$) и импликацию ($\& \vdash \supset$), или отрицание, которое дедуцирует импликацию ($\neg \vdash \supset$). И об этом мы тоже немного говорили в начале предыдущей (третьей) беседы.

Возвращаясь к *конструктивному аргументу*, замечу, что, на мой взгляд, вопрос о демаркации можно свести к вопросу о том, насколько *завершённой* является конструкция наших рассуждений. Если мы уже определили понятие логического следования, то проблема дедукции объясняется сама собой.

В отличие от индуктивной, дедуктивная конструкция, даже если она строится с использованием единичного примера, всегда завершена до последних деталей. Она *непрерывна* и не имеет «пустот» (её эллипсис должен легко восполняться). Это условие непрерывности для дедукции отмечал ещё Декарт. Позднее Лейбниц называл дедукцию *аргументацией по форме*, понимая под этим «не только тот схоластический способ аргументации, которым пользуются в школах, но всякое рассуждение, которое приводит к выводу в силу своей формы, в котором *не приходится дополнять ни одного члена*»[89] (курсив мой. – *М.Н.*). Можно сказать, что Лейбниц здесь уже уходит от силлогистической формы дедукции, предвосхищая то, что мы теперь называем логическим выводом[90].

Хотя дедукция может включать эллипсис (пример – сокращённые силлогизмы), вообще говоря, она не устойчива к деформациям (разрывам), поскольку каждый её шаг – это достаточное основание для заключения. И если её разобрать, в ней не окажется недостающих деталей. Аналитический характер дедукции как раз и состоит в том, что её доказательство разбирается «по кирпичикам» до последних деталей. Применительно к чистой логической дедукции справед-

---

89 *Лейбниц Г.В.* Новые опыты о человеческом разуме. М., 1936. С. 423.

90 *Чернявский В.С.* Вывод (в математической логике) // Философская энциклопедия. Т. 1. М., 1960.

лив известный афоризм Гераклита: «Путь наверх и путь вниз – один и тот же». Примером могут служить – аналитический вывод по таблицам Бета (путь вниз), и генценовский (секвенциальный) синтетический вывод (путь наверх).

Кто изучал традиционную теорию силлогизма, тот, конечно, помнит, что одной из принципиальных гипотез для проверки правильности силлогистического умозаключения является гипотеза о распределённости терминов. Я говорю гипотеза, поскольку её никогда не пытались обосновать иначе, как ссылкой на практику естественного языка, в котором кванторы «все» и «некоторые» различаются так, как этого и требует объёмная концепция силлогистической дедукции. В силлогистике, в соответствии с гипотезой о распределённости терминов, квантор «некоторые» *всегда* означает меньшую степень общности, чем квантор «все». Только современная (символическая) логика внесла в эту теорию поправку, указав, что известное правило обращения *per accidens* (правило обращения общих суждений) справедливо лишь при условии отступления от грамматического (обыденного) смысла квантора «некоторые» и широкого его толкования, не исключающего общности: «некоторые, а, может быть и все».

Возможно, что не только мне встречались силлогизмы, безукоризненные согласно диаграммам Венна, но дефектные по школьной теории из-за правила распределённости терминов.

4.2. Дедукция как верификация

Если за термином «верификация» удержать его этимологию (позднелатинское verificatio означает доказательство, подтверждение, от лат. verus – истинный и facio – делаю) и вместе с тем определить верификацию (по Маху) как *принцип возможности опытной проверки*, то вопрос о разнице между верификацией и дедукцией сведётся, по сути, к толкованию слова «опыт».

Действительно, в ином случае верификацию можно толковать как экспериментальную проверяемость, а в ином – как процедуру, связанную с некоторым умственным (абстрактным), например логическим или математическим, построением. И хотя эти ситуации очевидно различны, всё же служат они по сути одной цели – цели обоснования наших умозаключений. Это и позволяет мне вспомнить загадочные слова Иммануила Канта об «эмпирической дедукции», с помощью которой мы приходим к аксиомам и правилам логики.

А доказательство из аксиом, по мысли того же Канта, – это уже «дедукция трансцендентальная»[91]. Но распространить принцип верификации на область логической дедукции можно и не только в силу этимологического родства понятий[92].

Излишне повторять, что логика – это учение о том, как делать (facto) умозаключения, что это теория, или лучше сказать, совокупность теорий о корректных (правильных – verus) умозаключениях, формально представленных в тех или иных логических системах (исчислениях). Но если бы все логические системы строились по одному шаблону, название этого параграфа было бы излишним. Однако логических систем не счесть, хотя шаблонов, по которым они «скроены», много меньше. И как бы ни различались логические системы, их основная цель – приложения. А если иметь в виду приложения, то «типичная задача, которая ставится перед логической системой, заключается в следующем. Даны некоторые логические (записанные на языке этой системы. – *М.Н.)* предложения, представляющие собой посылки (какого-то содержательного рассуждения. – *М.Н.*), а также предложение, называемое *теоремой*. Последнее является утверждением, истинность которого мы хотим *проверить* (курсив мой. – *М.Н.*), то есть попытаться продемонстрировать, что утверждение-теорема является истинным при условии истинности посылок. Если такая демонстрация может быть проведена, она называется *доказательством* теоремы, следующим из данных посылок, и мы говорим, что посылки *влекут за собой* (имплицируют) эту теорему»[93].

Я подчеркнул здесь одно, на мой взгляд, ключевое слово – *проверить*. В самом деле, если иметь в виду сферу приложений (например, сферу обоснования), то типичная задача логики – это проверка уже сделанного умозаключения, например, проверка «на истинность» или на «выводимость» (в некотором логико-математическом исчислении) уже известной содержательной теоремы. Следовательно, предметом логического анализа является не только *вывод предвосхищающий* (когда ещё нет заключения, и о доказуемости следствий мы пока ещё ничего не знаем), но также и *вывод подтверждающий*, когда заключение в качестве содержательно полученной теоремы или в виде рассуждения (правила), претендующего на логическую корректность, представлено на суд логического обоснования (доказательства).

---

91 *Кант И.* Соч. Т. 3. С. 182.

92 Любопытный опыт такого распространения принадлежит Р.Фейсу в заметке, опубликованной в сб.: Le raisonnement en mathématiques et en sciences experimentales. P., 1958. Краткую информацию об этом см.: Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967. С. 376–377.

93 *Рафаэл Б.* Думающий компьютер. М., 1979. С. 146.

Так, если β представлена нам как теорема (истинное предложение) некоторой определённой теории, связанная с группой гипотез (или аксиом) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, то мы надеемся (предполагаем), что β может быть доказана с помощью правил или аксиом логики, соответствующей этой теории. А это означает, что мы надеемся на то, что мы в состоянии проверить (располагаем *алгоритмом проверки*), что гипотезы $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ и отрицание нашей теоремы взаимно несовместимы. Говоря иначе, мы надеемся на то, что импликацию $\alpha_1 \& \alpha_2 \& ... \& \alpha_n \supset \beta$ можно будет *проверить* на её формальную общезначимость.

И хотя этот логический принцип называется *принципом дедукции,* в нём, как легко заметить, нет никакой объёмной оценки дедукции. Он говорит только о важности логических законов (общезначимых формул логики, тавтологий) для оценки приемлемости тех или иных способов рассуждений (умозаключений), поскольку понятие «приемлемое» или «логически правильное» рассуждение как раз и уточняется через понятие «логический закон».

Конечно, это не исключает тех случаев, когда алгоритмы дедукции при этом, вообще говоря, будут другие, отличные от алгоритмов проверки. В частности, таковы алгоритмы, которые мы рассмотрели в предыдущей (третьей) беседе, алгоритмы, основанные на приведении к нормальным формам. Они работают по прямому назначению предвосхищающего выведения ещё не известных нам следствий. И в этом их непреходящее значение. Остальные, применяемые в основном в области искусственного интеллекта, например, таблицы истинности, алгоритмы Куайна, Девиса и Патнэма, алгоритм Хао-Вана, принцип резолюций и др., хотя и опираются на практику нормальных форм, служат в основном целям верификации. Из них, конечно, самый яркий пример, – таблицы истинности, которые из метода определения логических связок превращаются в алгоритм верификации, как только речь заходит о логическом следовании.

Таким образом, можно сказать, что классическая дедукция представлена в современной логике двумя, столь же классическими, методами – *аналитическим* (алгоритмы проверки теорем) и *синтетическим* (вывод следствий из аксиом). При этом оба метода покоятся на трёх классических принципах – тождества, исключенного третьего и противоречия[94].

Резюмирую сказанное выше в следующем определении: *дедукция* – это решение задачи на логическое доказательство теорем либо прямым их построением (синтетический метод), либо соответствующим анализом посылок (рассуждения) и его заключения на их логическую совместимость (аналитический метод).

---

[94] Эту туманную фразу я постараюсь в дальнейшем пояснить.

4.3. Примеры дедуктивных систем

В третьей нашей беседе мы много времени уделили табличному представлению логики высказываний. С помощью таблиц и нормальных форм мы научились распознавать по любому данному рассуждению, является оно логически правильным или нет. Но, как я уже сказал выше, таблицы это только *метод верификации* умозаключений, а не *метод вывода*. Таблицы позволяют проверить правильность заключения из данных посылок. Но они не научают самим рассуждениям.

Теперь желательно восполнить этот пробел, связав представление о логическом следовании с естественной практикой рассуждений, когда мы переходим от одних высказываний к другим, пока не дойдём до самого последнего высказывания, которое мы и хотим доказать или пока мы не научимся опровергать возможные возражения оппонента.

Но для начала отмечу, что помимо тех рассуждений, о логике которых мы говорим в наших беседах, существуют рассуждения, которые могут признаваться правильными, но которые классическая логика не рассматривает.

Таковы, в частности, рассуждения, имитирующие причинно-следственные отношения между какими-либо событиями. Например, «Пётр заснул быстро, потому что накануне много работал». В основе формализации таких высказываний лежит так называемая *каузальная импликация* и, соответственно, причинные союзы «поэтому», «потому, что» и пр. Другим примером этому могут служить рассуждения по поводу причинно-следственных отношений по согласованным шкалам причин и следствий. Так, если α – шкала уголовных преступлений, а β – шкала наказаний, то α и β обычно согласованы следующим образом: за меньшее преступление следует (полагается) и меньшее наказание и, напротив, за более тяжкое преступление следует и более тяжкое наказание.

Как в этом, так и в других случаях весьма существенно, что значения причинных союзов (в отличие от союзов классической логики) могут варьироваться в зависимости от контекста рассуждения. А это означает, что каждый вариант причинности требует своей особой логики. Правда, не исключено, что для формализации причинно-следственных связей (как составной части сложной структуры) может привлекаться и та логика, о которой речь в этой нашей беседе. Так, согласно А.А.Маркову, причинная зависимость β от α относительно некоторой совокупности законов природы γ имеет место, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) β следует после α; 2) β может быть логически (в смысле дедуктивной логики) выведено из α с помощью указанной выше совокупности законов γ [95].

Понятно, что, каждая логическая теория имитирует (моделирует) определённые способы рассуждений и умозаключений. Например, упомянутая выше логика причинности исторически, начиная с эпикурейской каноники, в основном имитировала способы рассуждений от частного к общему и вырастала как логика индукции. Но мы тему индукции в наших беседах опустим.

Логические теории, которые мы рассмотрим ниже, считаются *дедуктивными*. Они моделирует дедуктивные способы рассуждений в смысле кантовской трансцендентальной дедукции на основе уже готовой системы аксиом и правил. А какова эмпирическая дедукция, которая приводит нас к аксиомам и правилам этих теорий, это, пожалуй, останется тайной их творцов.

Теории, о которых ниже пойдёт речь, мы, как и в нашей третьей беседе, представим в форме исчислений. Исчисления эти будут более или менее формальными. Всё зависит от преобладания синтаксических или семантических элементов. Но в любом случае они строятся объединением двух порождающих процессов: процесса индуктивного порождения грамматически правильных выражений исчисления – его слов и фраз (языка исчисления), и процесса дедуктивного порождения потенциально значимых (истинных) его выражений (теорем) исчисления. Заданием алфавита исходных символов (знаков), правил образования его языка (структурных особенностей его предложений) и правил преобразования его фразеологии логическое исчисление однозначно определяется как формальная структура возможных дедукций – трансцендентальных либо верифицирующих.

Выбор такой структуры как представителя определённых методологических идей и соответствующее осмысление её формальных (абстрактных) объектов превращает исчисление в определённую теорию приемлемых способов рассуждений – теорию логического вывода.

В этих беседах я не ставлю своей задачей подробное построение дедуктивных теорий как исчислений, формализованных во всех деталях. На этот счёт имеется достаточное количество учебной литературы[96]. Моя задача показать на нескольких примерах, как по-разно-

---

95 *Марков А.А.* Что такое кибернетика? // Кибернетика, мышление, жизнь. М., 1964.

96 Правда, как правило, не той, которая (с одобрения министерства высшего образования) заполонила рынок в качестве учебных пособий для студентов гуманитарных специальностей.

му может выглядеть дедукция в зависимости от поставленной цели. Главное для меня, попытаться на этих примерах оправдать предыдущую мысль о демаркации между дедукцией как верификацией и дедукцией как выводом «из полных обобщений».

В качестве первого примера я воспользуюсь наброском исчисления, которое называют *исчислением секвенций*. Мы сохраним за ним грамматику и синтаксис из третьей беседы с тем же указанием на различие предметного и метаязыка. Теми же будут и определение понятия формулы, и начертание знаков логических операций.

Однако теперь мы попробуем вовсе забыть о содержании высказываний, даже о таком скудном, как их истинностные значения. Теперь наша задача представить рассуждение в виде чисто формальной (синтаксической) конструкции. Для этого мы потребуем, чтобы течение наших мыслей было определённым образом упорядоченно явным указанием правил перехода от одной мысли (высказывания) к другой, например, чтобы оно имело вид цепочки высказываний, логически оправданной правилом в каждом звене цепочки. В логике такую цепочку называют выводом последнего высказывания (формулы). При этом линейность для вывода не обязательна, вывод может строиться и столбиком. Зато обязательным условием для вывода является следующее: он должен переносить свойство истинности по цепочке с посылок на заключение, если, конечно, посылки были признаны истинными. Только в этом случае мы будем называть вывод *корректным*. Замечу ещё, что вывод может заканчиваться желаемым результатом, а может, вообще говоря, не заканчиваться ничем (продолжаться до бесконечности), хотя в нашем случае таких ситуаций не будет.

Исчисления, в которых нам предстоит умозаключать, строится на аксиомах или на правилах, или на тех и на других. В любом случае от нас потребуется делать выводы (проводить рассуждения) только *по правилам* логики. Я выделяю слово «по правилам». И это вполне естественно, поскольку рассуждение без правил столь же нелепо, как и игра без правил. А рассуждать – это в определённом смысле играть. Не случайно Льюис Кэрролл, автор всемирно известной сказки «Алиса в стране чудес, назвал одну из своих книг «Логическая игра»[97].

Итак, в исчислении, которое мы сейчас рассмотрим, помимо аксиом и правил, мы выделим ещё один объект, который назовём *утверждением*. Понятия «утверждение» и «аксиома» мы определим сразу. А понятие «правило» будем вводить последовательно. Оно будет менять объём в зависимости от того, в какой именно логике мы хотим умозаключать, какой логикой пользоваться.

---

97 Она издана в 1991 г. издательством «Наука».

Итак, ***Утверждения*** – это выражения из формул (имеются в виду, конечно, правильно построенные формулы) следующего вида: *a*) любая формула, предварённая знаком «$\vdash$» есть утверждение; *b*) если α и β формулы, то $\alpha \vdash \beta$ есть утверждение. Выражение, стоящее до знака «$\vdash$» называется антецедентом утверждения, а стоящее после – его консеквентом. Антецедент утверждения может не содержать формул. Консеквент, напротив, не может быть пустым, но должен иметь не более одной формулы. Таким образом, утверждение констатирует либо определённое правилами отношение между суждениями, либо наше собственное отношение к высказываемому суждению. Цепочка утверждений образует *рассуждение*.

Аксиома – это утверждение, в котором следствие хотя бы один раз входит в перечень (последовательность) посылок и в котором ни до, ни после глагола «следует» (следовательно) нет знаков логических операций. Записывая аксиомы в метаязыке, мы будем говорить о схемах аксиом.

Примеры схем аксиом: $\alpha \vdash \alpha$, $\alpha, \beta \vdash \alpha$, $\alpha, \beta \vdash \beta$.

Замечание 1. Порядок посылок в аксиомах не фиксируется (абстракция от порядка).

Замечание 2. Если какая-либо посылка (формула) имеет несколько вхождений в левую часть утверждения (то есть до знака «$\vdash$»), то их (вхождения) можно сократить до одного.

Теорема – это либо аксиома, либо всякое беспредпосылочное (пустое в его левой части) утверждение, выведенное из аксиом по правилам системы. Таким образом, аксиомы, по определению, входят в число теорем.

Правила – это предписания, которым необходимо следовать в процессе перехода от одних утверждений (или суждений) к другим. Такой переход называется умозаключением или выводом. Правила определяют возможные схемы умозаключений, нашу работу со знаками логических операций. Только правила разрешают вводить операции в посылки или в заключения утверждений. Но, как мы увидим ниже, они не разрешают удалять эти операции из уже сделанных умозаключений. Иначе говоря, в нашем исчислении все правила – это правила введения логических операций. И поскольку в процессе умозаключений класс утверждений может расширяться, но не может сокращаться, схемой доказательства исключается возможность порочного круга (*circulus vitiosus*).

Теперь нам остаётся только последовательно вводить правила, заметив, между прочим, что характер исчисления (вид логики) будет зависеть от того, какие именно правила мы ввели. Мы будем называть наши правила *схемами умозаключений* или *фигурами дедукции*, формулы в которых будут располагаться в два этажа. Верхний этаж составят *гипотезы* фигуры дедукции, а нижний её заключение.

Первую группу правил, мы определим для конъюнкции (&) и дизъюнкции ($\vee$), по три на каждую из них:

1) $\dfrac{\alpha \vdash \gamma}{(\alpha \,\&\, \beta) \vdash \gamma}$ 2) $\dfrac{\alpha \vdash \gamma}{(\beta \,\&\, \alpha) \vdash \gamma}$ 3) $\dfrac{\vdash \alpha;\ \vdash \beta}{\vdash (\alpha \,\&\, \beta)}$

Правила 1) и 2) вводят конъюнкцию в антецедент, а правило 3) – в консеквент утверждения нижнего этажа соответствующей фигуры дедукции.

4) $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash (\alpha \vee \beta)}$ 5) $\dfrac{\vdash \beta}{\vdash (\alpha \vee \beta)}$ 6) $\dfrac{\alpha \vdash \gamma\,;\, \alpha \vdash \gamma}{(\alpha \vee \beta) \vdash \gamma}$

Правила 4) и 5), напротив, вводят дизъюнкцию в консеквент, а правило 6) в антецедент нижнего этажа соответствующей фигуры дедукции.

Отметим тут же, что наши умозаключения по схемам 1)–3) остаются законными, если мы добавляем одну и ту же посылку в левую часть (до знака «$\vdash$») какого-либо из утверждений (гипотез) верхнего этажа соответствующей фигуры дедукции.

Указанных аксиом и перечисленных правил вполне достаточно для доказательства утверждений такой алгебраической структуры, как *дистрибутивная решётка*, правда, решётка без дополнений. В нашей терминологии это означает, что мы можем доказать верные в ней утверждения из гипотез, но не можем доказать её теорем. Чтобы доказательство теорем стало возможным, нам необходима, по крайней мере, такая операция, как импликация и уже не раз упомянутый принцип дедукции, а, кроме того, и кое-что ещё. Иначе говоря, нужна более богатая теория, которая взяла бы на себя роль метатеории нашей крошечной теории решёток.

Поэтому я не буду приводить примеры доказательств из запаса её утверждений, а сразу перейду к обогащению нашей логики двумя правилами для импликации, что даст нам уже *импликативную решётку*:

7) $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\vdash (\alpha \supset \beta)}$ 8) $\dfrac{\vdash \alpha;\ \beta \vdash \gamma}{(\alpha \supset \beta) \vdash \gamma}$

Используя правило 7) все доказанные утверждения из гипотез можно преобразовать в теоремы. Система с правилами 1)–8) называется *положительной логикой*. В ней можно доказать как теорему, соответствующую правилу *modus ponens*, так и знаменитый принцип *verum sequitur ad quodlibet*.

Но мы докажем теорему, которая обычно входит в число аксиом исчислений гильбертовского типа и называется самодистрибутивностью импликации[98].

Теорема 1. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$

Доказательство: $q \vdash q$ $r \vdash r$

$q, (p \supset r) \vdash r$

$p \vdash p, (q \supset r), q \vdash r$

$p, p \supset (q \supset r), q \vdash r$

$p \vdash p, q, p \supset (q \supset r), p \vdash r$

$p, (p \supset q), p \supset (q \supset r), p \vdash r$

$p \supset (q \supset r), (p \supset q), p \vdash r$

$p \supset (q \supset r), (p \supset q) \vdash (p \supset r)$

$p \supset (q \supset r) \vdash ((p \supset q) \supset (p \supset r))$

$\vdash (p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$.

Чтобы сделать эту вертикаль формул более понятной, необходимо представить её анализ, то есть указать, чем именно, каким именно правилом обусловлен каждый шаг перехода от верхней формулы (последовательности формул) к формуле (последовательности формул) нижней. Но ради экономии места я оставляю эту задачу читателю. Такая работа позволит ему лучше понять, в чём состоит идея верификации, когда речь идёт о дедуктивном доказательстве.

Теперь же мы займёмся операцией, которая сопровождает и логику, и наш естественный язык с самого начала их жизни. Я имею в виду операцию *отрицания*. На сей раз мы не будем связывать эту операцию со значениями истинности, как мы делали это при табличной её характеристике. Мы дадим отрицанию чисто синтаксическое определение, связав его с понятием дедуктивной импликации. Таким образом, отрицание у нас не будет независимой операцией (как в табличной логике), а будет некоторого рода сокращением для процедуры вывода, называемого обычно«приведением к невозможному» (*reductio ad impossibile*). Говоря иначе, отрицание может появиться в нашей дедуктивной системе только как результат вывода из данных посылок какой-либо «стандартной нелепости». Мы обозначим такую нелепость термином «abs», и определим этот минимальный аспект (смысл) отрицания через импликацию: $\neg\, \alpha \equiv \alpha \supset \text{abs}$.

[98] *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1971. С. 38 (Аксиома А2).

Мы соединим с этим определением два правила введения отрицания – в консеквент: 9) $\dfrac{\alpha \vdash abs}{\vdash \neg\, \alpha}$ и в антецедент: 10) $\dfrac{\vdash \alpha}{\neg\, \alpha \vdash abs}$ нижнего этажа

Все семантические разъяснения, связанные с применением этих правил и самой минимальной логики я оставляю в стороне[99]. Отмечу только, что среди теорем этой логики нет принципа *ex falso sequitur quodlibet* $\neg\, p \supset (p \supset q)$, однако есть принцип $\neg\, p \supset (p \supset \neg\, q)$. Первый из этих принципов (противоречие влечёт любое утверждение) верен и классически, и интуиционистски, но обычно подвергается критике со стороны сторонников релевантной логики. Второй принцип (из противоречия следует ложь), кажется, вне сомнений. Его-то мы сейчас и докажем.

Теорема 2. $\neg\, p \supset (p \supset \neg\, q)$

Доказательство:

$p, q \vdash p$

$\neg\, p, p, q \vdash abs$

$\neg\, p, p \vdash \neg\, q$

$\neg\, p \vdash (p \supset \neg\, q)$

$\vdash \neg\, p \supset (p \supset \neg\, q)$

Теперь повторим важный результат В.Гливенко, полученный им ещё в 1929 г. – неложность в нашей минимальной (а, следовательно, и в интуиционистской) логике принципа *tertium non datur* (исключённого третьего)[100].

Теорема 3. $\neg \neg\, (p \vee \neg\, p)$

Доказательство:

$p \vdash p$

$p \vdash (p \vee \neg\, p)$

$p, \neg\, (p \vee \neg\, p) \vdash abs$

$\neg\, (p \vee \neg\, p), p \vdash abs$

$\neg\, (p \vee \neg\, p) \vdash \neg\, p$

$\neg\, (p \vee \neg\, p) \vdash (p \vee \neg\, p)$

$\neg\, (p \vee \neg\, p), \neg\, (p \vee \neg\, p) \vdash abs$

$\neg\, (p \vee \neg\, p) \vdash abs$

$\vdash \neg\neg\, (p \vee \neg\, p)$.

Можно, разумеется, продолжать демонстрацию связи логических теорем и допустимых правил дедукции в той форме, которая представлена выше и которую называют исчислением секвенций. Но я не стану этого делать. Отмечу лишь, что если к правилам минимальной логики мы прибавим либо в качестве определения, либо как прямое

---

[99] За подробностями отсылаю к ст.: *Гастев Ю.А.* Минимальная логика // Философская энциклопедия. Т. 3. М., 1964. Кое-что об этом можно найти в нашей пятой беседе.

[100] Об этой работе Гливенко см.: Историко-математические исследования. Вып. 5 (40). М., 2000; или: Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М., 1998.

правило вывода выражение abs $|\!-\ \alpha$, где α это произвольная формула, то мы получим известную интуиционистскую логику высказываний. И само собой понятно, что принцип *ex falso sequitur quodlibet* в этой логике по сути уже не потребует доказательства.

Сохраняется этот принцип и в классической логике. Но переход к классической логике от логики интуиционистской возможен лишь за счёт изменений в структуре добавляемых правил, если мы, конечно, не хотим расширения исчисления добавлением новых (структурно иных) аксиом, что в корне разрушило бы эстетику секвенциального принципа[101] .

В качестве примера другой логической «игры в доказательство» я выбрал систему, которая, согласно её авторам, имеет то дидактическое преимущество, что её правила игры находятся в полном соответствии с интуицией, в особенности в случае пропозиционального языка[102] . Правда, я немного изменил условия игры, предложенные авторами этой системы. Вместо задачи на доказательство теорем я ограничусь задачей на *верификацию рассуждений* (на доказательство корректности рассуждений), что, на мой взгляд, ещё более упрощает дидактический аспект этой работы.

Поскольку синтаксис системы мы заимствуем из третьей нашей беседы, понятие формулы будет таким же, каким оно было выше и в табличном исчислении высказываний. Кроме того, как и в секвенциальном варианте, мы будем называть *утверждением* такое выражение, которое констатирует определённое отношение между формулами. Мы будем представлять это с помощью символа «|–» или с помощью горизонтальной черты, которые будут разделять *посылки* фигуры дедукции и её *заключение*. В качестве посылок могут использоваться результаты уже доказанных утверждений и высказывания, которые мы назовём гипотезами (или предположениями). В любом случае все они должны иметь вид правильно построенных формул, а весь процесс доказательства рассуждения, как я уже сказал, будет процессом преобразования формул.

Теперь опишем правила, по которым нам предстоит одновременно и умозаключать (рассуждать), и верифицировать уже сделанные кем-то рассуждения. Правила при определённых условиях разрешают (или предписывают) переход от одного или нескольких высказываний, от одного или нескольких рассуждений к другим. Используя правила, рассуждение можно разбить на отдельные шаги таким образом, что правильность всего рассуждения будет зависеть как от этих

---

101 Об этом подробнее см.: Математическая теория логического вывода. М. 1967.

102 Речь идёт о ст.: *Borkowski L., Slupecki J.* A Logical system based on rules and its application in teaching mathematecal logic // Studia Logica. 1958. Vol. XII. P. 71–105.

отдельных шагов, так и от общей схемы самого рассуждения (от общей схемы вывода). Однако может случиться, что каждый отдельный шаг рассуждения правилен, но всё рассуждение несостоятельно. Отсюда необходимость делать различие между правилами «в один шаг» (их называют *правилами непосредственного вывода* или *непосредственными умозаключениями*) и правилами, определяющими общую структуру вывода. Мы называем последние *правилами доказательства*.

И те, и другие правила, мы разделим на *основные* (исходные) и *производные*. Производные мы будем получать с помощью основных. А среди основных для начала опишем правила построения «за один шаг» выражений, которые мы можем включать в наши рассуждения (присоединять к ним), если некоторые другие выражения уже содержатся в наших рассуждениях. Это правила, позволяющие оперировать с формулами нашей логической системы. Поскольку доказательства будут записываться «в столбик», мы будем их называть также правилами присоединения строк к доказательству.

Эти правила таковы:

Для импликации:

$$\frac{\alpha \supset \beta \quad \alpha}{\beta}$$

Это правило разрешает переход от двух формул над чертой, к формуле, записанной под чертой. Оно имеет несколько названий: правило отделения следствий, утверждающий модус, конструктивный модус, *modus ponens*. Мы назовём его также правилом удаления импликации «$\supset_у$».

$$\frac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \supset \beta}$$

Это правило называют *правилом дедукции*. Оно опирается на уже проведённый вывод, обозначенный в посылке: если верхний вывод возможен, то можно утверждать импликацию. Поэтому мы назовём это правило правилом введения импликации «$\supset_в$».

Для конъюнкции:

$$\frac{\alpha\&\beta}{\alpha} \quad \frac{\alpha\&\beta}{\beta} \ \&_у \text{ (удаление)} \qquad \frac{\alpha, \beta}{\alpha\&\beta} \ \&_в \text{ (введение)}$$

Для дизъюнкции:

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\ ; \ \frac{\beta}{\alpha \vee \beta} \ \vee_в \text{ (введение)} \qquad \frac{\alpha \vee \beta, \neg \alpha}{\beta} \ \vee_у \text{ (удаление)}$$

Для эквиваленции:

$$\frac{\alpha \equiv \beta}{\alpha \supset \beta}\ ; \quad \frac{\alpha \equiv \beta}{\beta \supset \alpha}\ \equiv_{и} (\text{исключение}) \qquad \frac{\alpha \supset \beta,\ \beta \supset \alpha}{\alpha \equiv \beta}\ \equiv_{в} (\text{введение})$$

С этой группой правил мы уже, по сути, знакомы. Семантически (таблично) они уже обоснованы в нашей третьей беседе. Эти правила легко запоминаются ввиду симметрии введения и удаления для каждой из логических операций. Замечу, что, в отличие от остальных, правило введения импликации (правило дедукции) не является правилом непосредственного умозаключения. Оно предполагает корректный вспомогательный вывод в качестве посылки для заключения. По сути, это эллиптический вариант принципа дедукции. И в этом своём качестве оно сродни правилам построения доказательства, то есть правилам, определяющим общую структуру выводов, к формулировке которых мы теперь и перейдём.

Итак, в качестве правил, характеризующих общую структуру выводов, допустимых в нашей логической системе, мы примем два: правило построения прямого доказательства и правило построения косвенного доказательства.

Правило прямого доказательства сводится к следующему:

1.1. Доказательство записываем в столбик.

1.2. В первых строчках записываем посылки данного рассуждения.

1.3. В последующих строчках разрешается записывать

а) утверждения (теоремы, положения) уже доказанные, в том числе и производные правила;

б) выражения, полученные по правилам «в один шаг» из предыдущих.

Доказательство заканчивается, когда в последней строке появится желаемое заключение.

Пример: $(p \supset q), (q \supset r), p \vdash r$.

Это умозаключение (рассуждение), правильность которого предлагается проверить или, другими словами, доказать. Это означает, что нужно построить вывод, последней формулой которого будет формула r.

Доказательство:

Записываем посылки:

1 $(p \supset q)$	
2 $(q \supset r)$	1-3 это посылки рассуждения
3 p	
4 q	по правилу исключения импликации из 1 и 3.
5 r	по правилу исключения импликации из 2 и 4.

Правило косвенного доказательства отличается от правила прямого доказательства только тем, что вслед за посылками рассуждения мы записываем отрицание того, что хотим доказать – отрицание заключения. Мы называем это *посылкой косвенного доказательства*. Правила присоединения строк остаются те же. Доказательство заканчивается, если в списке утверждений (формул) появятся строки, содержащие взаимно противоречащие утверждения (выражения, формулы). Тогда в последней строке мы отмечаем этот факт словом «*abs*». Последняя строка не нумеруется.

Пример: $(\neg p \supset q), \neg q \vdash p$.

Доказательство:

1 $\neg p \supset q$	
2 $\neg q$	Пояснение: в первых двух строках записаны посылки
3 $\neg p$	доказательства. В третьей строке посылка косвенного
4 q	доказательства. Вторая и четвёртая строка образуют
abs	противоречие, что и отмечается аббревиатурой *abs*.

Наши правила доказательства – это правила неформальные. Они сочетают элементы символизма с обращением к нашей интуитивной способности строить требуемый вывод. Но если правило прямого доказательства интуитивно очевидно, правило косвенного доказательства требует некоторых пояснений. Начнём с того, что это правило основано на дедуктивных свойствах противоречия. Поэтому его называют ещё правилом доказательства от противного (или правилом *reductio ad absurdum*). Применяя это правило, мы допускаем (временно в качестве истинного) заключение, обратное (противное) тому, которое хотим доказать. Если это наше допущение приводит к противоречию, оно отвергается и заменяется его отрицанием.

В самом деле, как мы уже видели выше, противоречие выражает тождественную ложь. Вывод тождественной лжи не может быть корректным, если мы исходим из допущения, что посылки истинны. Но за корректность (логическую правильность) вывода мы ручаемся, а истинность посылок обычно подразумевается. Следовательно, допущенная посылка косвенного доказательства неверна.

Семантической основой сказанного служит следующий принцип:

$\alpha \models \beta$, если из $\alpha, \neg \beta \models$ *abs*.

Действительно, предположим последнее, то есть, что $\alpha, \neg \beta \models$ *abs*. Тогда (в силу определения 3) должно быть верно $\alpha \models \neg \beta \supset$ *abs*. А это возможно лишь тогда, когда β истинно, а $\neg \beta$ ложно.

Напомню, что «$\models$» употребляется здесь в собственном смысле. Это семантический глагол «следует»; он ставится, как уже отмечалось выше, между посылками и заключением всякий раз, когда утверждается истинность заключения при истинности посылок. Напротив, «*abs*» в приведённом выше рассуждении является сокращением для явной формы противоречия: (α & $\neg$ α), то есть употребляется не в собственном смысле[103].

Косвенное доказательство от противного – это сильная форма доказательства. Всё, доказанное прямым путём, может быть доказано и косвенно; но обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому в формулировке нашей системы мы могли бы обойтись только формой доказательства от противного. Однако по ряду причин (мы обойдём их молчанием) прямые доказательства ценятся выше косвенных.

Заметим теперь, что мало сформулировать правила теории, необходимо теорию обосновать. В идеале выбор правил (и аксиом) должен быть таким, чтобы класс формально (синтаксически) доказуемых теорем совпадал с классом содержательных (доказуемых семантически) истин теории. Этому условию *полноты* формальные теории не всегда удовлетворяют. Но скромные теории, именуемые классической логикой высказываний, в этом смысле полны.

Строго говоря, поскольку высказывается претензия на дедуктивную формализацию логики, таблично оправданной, необходимо не только описать формализм теории, но и доказать метатеоремы об эквивалентности этих дедуктивно построенных исчислений табличному представлению логики. В нашем случае это означает, что все умозаключения, полученные дедуктивно по правилам наших теорий, логически корректны.

Таким образом, по сути, для оправдания теории, необходимо доказать, так сказать, свободную (неориентированную) связь между табличной общезначимостью и дедуктивной выводимостью. Эта связь выражается в двух метатеоремах.

Это:

Теорема корректности: Если $\vdash \alpha$, то $\models \alpha$;

Теорема полноты: Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$.

Хотя, в силу краткости нашей беседы, мы эти доказательства опустим, всё же необходимо сказать несколько слов о содержании этих теорем. Некоторые намёки на это уже были сделаны в ходе табличного построения логики. Теперь остановимся на вопросе об общезначимости. Заметим, что в той части логики, о которой речь идёт в наших беседах, общезначимость, тавтологичность и всегда-истинность синонимы. Однако так обстоит дело только в чистой логике. В прикладной логике, то есть в какой-либо научной теории, основанной на логи-

[103] Собственной формулой абсурда будет, например, формула 0 = 1.

ке, когда речь идёт о выводимых формулах (теоремах) этой теории, естественно говорить об общезначимости *относительно данной системы аксиом* (постулатов) этой теории. Теорема 2 + 2 = 4, выведенная из аксиом арифметики, не является общезначимой в том табличном смысле, о котором мы говорили в третьей беседе.

И в случае нашего натурального (второго) исчисления, в котором знак а в записи $\vdash \alpha$ символизирует последнюю формулу данного вывода, например, формулу p из последнего примера, надо понимать, что эта формула, как и любая другая пропозициональная буква, вовсе не является теоремой. Она только обозначает возможность быть теоремой (то есть истинным высказыванием) при соответствующем истолковании посылок.

Поэтому, если мы хотим доказать указанные выше метатеоремы в натуральном исчислении, нам необходимо от системы умозаключений (логических выводов) перейти к системе соответствующих этим умозаключениям теорем. В нашем случае эта задача легко решается с помощью правила введения импликации, или, в других терминах, с помощью принципа дедукции (метатеоремы о дедукции), впервые установленному Жаком Эрбраном.

К этому принципу обычно подходят формально, останавливаясь преимущественно на особенностях его доказательства. Но я хочу подчеркнуть одну важную философскую деталь, отмеченную самим Эрбраном и указывающую не только на относительность, но и на некий априоризм (априорный характер) *любой доказуемой истины*: Если высказывание β истинно в какой-либо определённой теории, то должна существовать такая система гипотез $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что импликация $\alpha_1 \& \alpha_2 \& \ldots \& \alpha_n \supset \beta$ будет общезначимой теоремой логики.

Иными словами, если истина есть, она не зависит от нашего умения находить её доказательство. Кажется, что это чисто классическое (не конструктивное) истолкование принципа дедукции. Но, по крайней мере, это констатация открытых проблем в науке[104].

Скажем теперь несколько слов о *выводимых правилах* и теоремах.

В предыдущем изложении мы представили пропозициональную логику (логику высказываний) в виде теории, основанной на правилах. По замыслу эта теория потенциально охватывает все логически правильные (общезначимые) умозаключения (рассуждения). Основываясь на её правилах, мы можем обойтись без табличной проверки

---

[104] В этой связи я хочу обратить внимание читателя на тезис стоиков, высказанный ими против Аристотеля: «ни одно положение не может приниматься за истинное, если не найдены другие положения (гипотезы), из которых оно следует» (Цит. по: *Ахманов А.С.* Логическое учение Аристотеля. М., 1960. С. 279).

умозаключений, пользуясь средствами дедуктивного доказательства. По отношению к табличному такое построение логики не является излишним, хотя и требует определённых навыков в искусстве дедуктивного рассуждения. Оно не является излишним, прежде всего, потому, что понятие дедуктивного рассуждения (дедуктивного вывода) — это понятие логическое *par exellence*, в то время как понятие исчисления (в нашем случае табличного исчисления) логическим, строго говоря, не является. Оно не является излишним также и потому, что только в такой дедуктивной форме логика высказываний годится в качестве составной части более широкой логической теории — *логики предикатов*.

Надо сказать, что число основных правил, которые мы предложили, достаточно для доказательства любого общезначимого умозаключения. Правда, при некотором условии. В частности, при условии подходящего выбора очерёдности доказываемых теорем. Как справедливо отмечают авторы этой системы, несмотря на формальную простоту, её правила требуют некоторой изобретательности. Поэтому в дальнейшем для облегчения доказательств нам потребуется более широкий (наряду с основным) запас правил вывода (банк данных теорем и правил). Эти новые правила обычно называют *производными* или *выводимыми* или *допустимыми*. По сути, они совпадают с умозаключениями, корректность которых мы доказываем с помощью основных правил. Облегчая процесс доказательства, новые правила в то же время не должны изменять характер нашей дедуктивной теории, они не должны расширять понятие общезначимости доказуемых умозаключений — всё, доказуемое с помощью производных правил, должно быть доказуемо и без них.

Несмотря на такой консервативный характер производных правил, расширение теории за счёт этих правил чрезвычайно полезно. В самом деле, пусть $\{R\}$ совокупность основных правил нашей теории, а α — произвольная общезначимая формула (общезначимое умозаключение) этой теории. Тогда, в силу теоремы полноты, имеем $\{R\} \vdash \alpha$. Это принципиальный факт. Однако непосредственное доказательство этого факта с помощью одних только основных правил вывода нашей теории может оказаться невозможным делом. На помощь приходит следующая теорема: если $\{R\} \vdash \alpha$ в принципе верно, то для доказательства этого всегда найдётся совокупность $\{S\}$ теорем и производных правил вывода, содержащих только символы из алфавита нашей теории, которые входят как в $\{R\}$, так и в α, и таких, что $\{R, S\} \vdash \alpha$.

Отметив это, займёмся коллекционированием, как производных правил вывода, так и соответствующих им теорем. Повторю, что мы будем считать допустимым правилом любое рассуждение, обоснованное основными правилами нашей дедуктивной системы.

Начнём с группы правил, касающихся отрицания.

Правило 1. Удаление отрицания ($\neg_у$)

$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$

Доказательство:

1. $\neg\neg\alpha$ посылка доказательства (п.д.)
2. $\neg\alpha$ посылка косвенного доказательства (п.к.д.)

---

abs

Правило 2. Правило Брауэра.

$\neg\neg\neg\alpha \vdash \neg\alpha$

Доказательство:

1. $\neg\neg\neg\alpha$ (п.д.)
2. $\neg\neg\alpha$ (п.к.д.)

---

abs

Правило 3. Правило введения отрицания ($\neg_в$).

$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$.

Доказательство:

1. α (п.д.)
2. $\neg\neg\neg\alpha$ (п.к.д.)
3. $\neg\alpha$ Применение правила 2 к строке 2.

---

abs

Правило 4. *Modus tollens* (ложность следствия влечёт ложность основания.

$\alpha \supset \beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha$

Доказательство:

1. $\alpha \supset \beta$ (п.д.)
2. $\neg\beta$ (п.д.)
3 $\neg\neg\alpha$ (п.к.д.)
4. α Применение правила 1 к строке 3.
5. β Применение правила $\supset_у$ к строчкам 1 и 5

---

abs

Наконец, приведу ещё одно умозаключение, связанное с отрицанием:

Правило 5. $\alpha \supset \beta, \neg \alpha \supset \gamma, \neg \beta \vdash \gamma$

Доказательство:

1. $\alpha \supset \beta$	п.д.
2. $\neg \alpha \supset \gamma$	п.д.
3. $\neg \beta$	п.д.
4. $\neg \alpha$	правило 4 к 1 и 3
5. γ	$\supset_у$ к 2 и 4.

Уже на приведённых примерах мы видим, как в дедуктивной системе одни правила помогают появляться другим. В этом и заключается их работа. Стоит, однако, предостеречь от «абсолютистского» толкования *исходных правил*. По сути, и те правила, которые обозначены как исходные, и те, которые появляются в процессе доказательства, в принципе не различаются ничем, кроме нашего предпочтения, а предпочтение подчиняется, во-первых, *принципу простоты*, а, во-вторых, требованиям полноты и корректности.

В примерах 1 и 3 мы доказали корректность как введения двойного отрицания, так и его удаления. Это первые допустимые (производные) правила нашей системы. Вместе с правилом дедукции они позволяют получить две теоремы: $(\alpha \supset \neg\neg \alpha)$ и $(\neg\neg \alpha \supset \alpha)$. А правило $\equiv_в$ даёт теорему $\alpha \equiv \neg\neg \alpha$, которой соответствует факт двойной выводимости. В свою очередь, по правилу введения конъюнкции двойную выводимость можно представить формулой $(\alpha \supset \neg\neg \alpha) \& (\neg\neg \alpha \supset \alpha)$.

Мы увидим ниже, что переход от рассуждений к теоремам (к общезначимым формулам) не лишен оснований. Он оказывается полезным подспорьем для доказательства (обоснования корректности) тех же рассуждений. Но если доверять интуиции, то это и другие доказательства мы могли бы не проводить, сославшись, к примеру, на уже знакомый табличный метод. Это может, конечно, служить в качестве мотивировки для пополнения соответствующих правил и теорем «чистых» (формальных) логических исчислений или любых теорий, в которых логика предполагается в качестве основы для доказательств. Однако это не лучший способ знакомства с дедуктивной системой[105].

[105] До сих пор большая часть рассмотренных нами умозаключения (рассуждений) представляла собой *схемы умозаключений*. Они представлены на метаязыке (на языке исследователя). Но в принципе ничего не измениться, если мы перейдём на предметный язык, который мы описали в нашей третье беседе, а иногда использовали и здесь.

Упражнения.

Докажите, что следующие умозаключения допустимы в качестве производных правил:

$\alpha \supset \neg \beta, \beta \vdash \neg \alpha$

$\neg \alpha \supset \beta, \neg \beta \vdash \alpha$

$\neg \alpha \supset \neg \beta, \beta \vdash \alpha$

$\neg (\alpha \,\&\, \beta), \alpha \vdash \neg \beta$

$\neg (\alpha \vee \beta) \vdash \neg \beta \,\&\, \neg \alpha$

$((\alpha \,\&\, \beta \supset \gamma) \,\&\, \neg \gamma) \vdash (\neg \alpha \vee \neg \beta)$[106].

Читатель, возможно, уже заметил, что, в контексте этой беседы я делаю акцент на умозаключениях, а не на тождественных истинах, о которых много говорилось в нашей третьей беседе. И это не случайно, поскольку наши обычные рассуждения связаны не столько с истиной логической, сколько с истиной фактической, а эти истины всегда условны. Возвращаясь к терминологии нашей третьей беседы, можно сказать, что в случае умозаключений достаточно, чтобы заключительная формула (заключение) всегда выполнялась на тех потенциальных табличных моделях (ПТМ), на которых выполняются посылки. Таким образом, в реальной практике умозаключений речь идёт об истине *относительно данной системы посылок*.

Такая условная истина естественным образом связана с понятием о *совместимости* посылок и заключения, что имеет свои преимущества, когда возникает вопрос о существовании реальной модели для наших рассуждений. Если объединение системы посылок и отрицания доказываемого тезиса $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \cup \{\neg \beta\}$ невыполнимо, то β (тезис) будет логическим следствием этой системы посылок. Место прямого доказательства здесь заступает косвенное, основанное всё на том же принципе дедукции. Важно, однако, что при этом никакого вывода (в смысле натурального исчисления), по сути, не требуется. Требуется только *анализ* системы высказываний на их взаимную совместимость[107].

Это наглядно выражается в так называемом *методе резолюций*, созданном для машинного распознавания логических следствий.

За ограниченностью объёма этой книги я не имею возможности описывать здесь этот метод. Но тем, кто захочет ознакомиться с этим методом, я рекомендую обратиться к соответствующей литературе[108].

---

[106] Последнее правило я называю *правилом отбрасывания версий* (гипотез). Оно обычно используется для избавления от парадоксов.

[107] Замечу, что исторически дедукция всегда ассоциировалась с синтезом.

[108] На русском наиболее подробно этот метод изложен в кн.: *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М., 1983.

Отмечу только, что метод резолюций тесно связан с понятием о нормальных формах, о чём мы подробно говорили в нашей третьей беседе. Однако трудно согласиться с тем, что схему порождения логических следствий, характерную для этого метода, можно окрестить как дедукцию в её классическом смысле как «всякое умозаключение от общего к частному, – в какой бы форме оно ни выражалось, и каково бы ни было его значение как доказательства»[109] . По сути, метод резолюций – это приведение (редукция) множества дизъюнктов к. н. ф. к некоторому стандартному виду (к пустому дизъюнкту), основанное на последовательном применении *принципа противоречия*.

---

[109] *Троицкий М.* Учебник логики. Кн.1. М., 1886. С. 67.

Беседа пятая. Дедукция и принцип противоречия

> В построении всех истинных аксиом бóльшая сила – у отрицательного довода.
>
> *Фрэнсис Бэкон*

5.1. О значении принципа

Принцип противоречия, в том виде, в каком обычно его излагают, указывает на недопустимость одновременного утверждения (в рассуждении, в тексте или в теории) двух суждений, из которых одно является прямым отрицанием другого. Важно, что этот принцип характеризует особый тип противоположности, исключающей всякую возможность синтеза противоположных сторон (*contradictorie oppositum esse*). Поэтому принято считать, что отвергаемый им факт противоречия создаёт парадоксальную ситуацию и указывает на неблагополучие в исходных допущениях рассуждения или в ходе самого рассуждения.

Аристотель считал принцип противоречия самым достоверным из всех основоположений, к которому, в конечном счёте, сводится любое доказательство. Это убеждение Аристотеля получило важное дополнение в математической теории доказательств, когда открыли, что противоречие обесценивает самый факт доказательства, поскольку из противоречивых суждений можно вывести не только то, что мы хотим доказать, но и всё, что угодно. И если мы верим в истинность результатов доказательства, то истинным оказывается всё.

К сожалению, у Аристотеля можно найти немало отступлений от чисто логической точки зрения на проблему противоречия. В частности, его экскурсы в онтологию дали повод онтологизировать и принцип противоречия. Оппозиция не заставила себя ждать. Философия особенно пережила это на примере гегелевской диалектики. Но в пылу полемики сторонников формальной и сторонников диалектической логики потерялась существенная деталь вопроса – идея ***дедуктивной непротиворечивости*** теории. Эту, и только эту, идею отстаивает логика.

На примере паранепротиворечивых теорий это более чем очевидно. Допуская противоречия, но, убирая *ex falso sequitur quodlibet*, мы сохраняем идею непротиворечивой дедукции. Поэтому я не вижу оснований, чтобы рассматривать паранепротиворечивые логики как некий «упрёк Аристотелю», или, в некотором смысле, как поддержку тезиса неуниверсальности закона противоречия.

Если речь идёт о теории, то всё, что необходимо для доказательства её непротиворечивости, это наличие некоторого характеристического свойства, которое мы выбираем сами, руководствуясь содержанием и задачами этой теории. Если все теоремы этой теории (аксиомы входят в число теорем) имеют данное свойство, а их отрицания его не имеют, то такая теория дедуктивно непротиворечива. В ней попросту отсутствуют условия для построения доказательств, приводящих к противоречию.

И ещё одно обстоятельство, связанное с существованием противоречивых суждений, стоит отметить. Это полнота. Может случиться, что ни одно из взаимно противоречащих положений недоказуемо в данной теории. Тогда мы можем сказать, что эти положения лежат вне интервала абстракций, рассматриваемой теории. Противоречивые суждения налицо. А противоречия как такового нет. Следовательно, мы можем выбирать любое из них, чтобы пополнить исходную теорию. В результате мы получим две различные теории, но не противоречащие одна другой, а дополнительные. В этом, собственно, смысл *принципа дополнительности*. Этот принцип родился в физике. Но он не чужд и математике. Примером может служить аксиоматическая теория множеств без аксиом выбора или детерминированности. Добавление любой из последних аксиом к первоначальным порождает две дополнительные теории. Или более яркий пример - непротиворечивое расширение «конструктивной» части системы Цермело-Френкеля добавлением континуум-гипотезы (К.Гедель, 1938) и такое же непротиворечивое её расширение добавлением отрицания континуум-гипотезы (П.Дж.Коэн, 1963).

5.2. Аргумент от непротиворечивости

Это один из самых древних видов аргументации. В европейскую науку его ввели, по-видимому, элеаты. Во всяком случае, по свидетельству Филопона, именно Парменид и его сторонники, отстаивая идею умопостигаемой реальности, ставили во главу угла её непротиворечивость. Им же принадлежит и первый «штриховой портрет» аргументирующего рассуждения, использующего дедуктивные свойства противоречия. Я имею в виду «уличающие аргументы» Зенона Элейского, его апории, основанные на этом способе логической аргументации. Правда, логическая форма зеноновских аргументов {а именно: $(\boldsymbol{A} \supset \neg \boldsymbol{A}) \supset \neg \boldsymbol{A}$} была эксплицирована позднее в школе Платона. Этой же школе принадлежит, по-видимому, и аргумент, представленный известной формулой $(\boldsymbol{A} \,\&\, \neg \boldsymbol{A}) \supset \boldsymbol{B}$. Отрицая «критерий основания» Протагора, Платон замечает, что если этот критерий принять, то придётся допустить и законность противоречий, а следовательно, и произвольность суждений. Ещё позднее Аристотель в одном из своих ранних (утерянных) произведений не только явно сформулировал ***закон противоречия***, но (по свидетельству Александра Афродизийского) дал симметричную зеноновской формулировку косвенного аргумента, которым воспользовался Евклид {«Начала», кн. 1Х, теорема 12: $((\neg \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}) \supset \boldsymbol{A})$} и который получил впоследствии (в позднем средневековье) название «тонкое следование» (*consequentia mirabilis).*

Современное развитие темы противоречия своё начало ведёт от первых парадоксов, обнаруженных в наивной теории множеств. Именно тогда Анри Пуанкаре заявил, что понятие «существовать» в математике может иметь только один смысл – отсутствие противоречий. Такая постановка вопроса позволяла использовать без ограничений все виды так называемых апагогических косвенных доказательств, которые основываются на дедуктивных свойствах противоречий[110].

Первые примеры таких доказательств восходят к античности. В частности, Аристотель явно формулирует их как доказательства «посредством приведения к невозможному» (*reductio ad impossible*), добавляя, что «при приведении к невозможному противоположное суждение (противоречащее тезису, – *М.Н.*) есть истина не заранее признанная, а условно взятая»[111]. Аристотель не указывает, на какие логические законы опираются косвенные доказательства. Между тем, уточнение этого вопроса послужило основанием к разделению косвенной аргументации на различные степени косвенности и к размежеванию логики на классическую, допускающую свободное использование всех форм аргументации от противоречащего случая (например, все формы обратной контрапозиции), и интуиционистскую (конструктивную), допускающую, вообще говоря, только одну её фор-

---

[110] Подробно с содержанием этих доказательств можно ознакомиться по ст.: *Есенин-Вольпин А.С.* Доказательство от противного // Философская энциклопедия. Т. 2. М., 1962; *Он же*: Косвенное доказательство // Там же. Т. 3. М., 1964; *Новосёлов М.М.* Доказательство косвенное // Новая философская энциклопедия. Т.1. М., 2000.

[111] *Аристотель.* Аналитики, 61a 19 – 61b 4. М., 1952. С.142.

му – доказательство отрицательных суждений через построение, приводящее к противоречию гипотезу об истинности положительной посылки рассуждения.

Таким образом, приведённый выше закон Зенона соответствует интуиционистской установке, а его симметричная форма, данная Аристотелем, нет. Это обусловлено тем, что косвенные формы доказательства положительных тезисов уравнивают в правах положительные и отрицательные способы утверждений в форме закона двойного отрицания (*duplex negatio affirmat*), что интуиционистски неприемлемо. Правда, речь идёт только о той части этого закона, которая разрешает «снимать» двойное отрицание. Полный закон утверждает тождественное равенство (равносильность) какого-либо суждения и его двойного (повторенного дважды) отрицания, чему соответствует факт совместной выводимости (доказуемости) в классических пропозициональных исчислениях (исчислениях логики высказываний), включающих отрицание, формул ($\boldsymbol{A} \supset \neg\neg \boldsymbol{A}$) и ($\neg\neg \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}$).

С точки зрения абстракций классической логики, то есть при условии, что принята дихотомическая оценка суждений «истинно – ложно» (*ситуация исчерпания*) и закон противоречия (*ситуация исключения*), закон двойного отрицания представляется очевидным. В самом деле, если истинно $\boldsymbol{A}$, то ложно $\neg \boldsymbol{A}$ (на основании ситуации исключения). И так как (на основании ситуации исчерпания) другой возможности нет, отрицание $\neg \boldsymbol{A}$, то есть $\neg\neg \boldsymbol{A}$ должно быть истинно. Таким образом, истинность $\boldsymbol{A}$ влечёт истинность его двойного отрицания. Это так называемая прямая (первая) подформа закона двойного отрицания. Она принимается и в интуиционистской логике. Обратная (вторая) его подформа – закон снятия двойного отрицания обосновывается тем, что суждения, несовместимые с одним и тем же суждением, классически равносильны (на основании ситуации исключения и ситуации исчерпания, взятых одновременно). В частности, и $\neg\neg \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}$ несовместимы с $\neg \boldsymbol{A}$. Следовательно, они либо одновременно истинны, либо одновременно ложны (таков именно смысл равносильности суждений), что и оправдывает импликацию ($\neg\neg \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}$).

Основной вопрос, связанный с доверием к *duplex negatio*, – это вопрос о логическом смысле отрицания. На это обратил внимание ещё Христоф Зигварт: «сущность отрицания исчерпывается вполне лишь в том случае, когда к закону противоречия присоединяется положение, что *отрицание отрицания* даёт утверждение»[112].

112 *Зигварт Х.* Логика. Т. 1. СПб., 1908. С. 168.

Правда, принятие этого закона в двух его подформах само по себе ещё недостаточно для порождения классического смысла отрицания. Тем не менее, закон двойного отрицания, уравнивая положительную и отрицательную манеру утверждения, раскрывает по существу формальный (и циклический) смысл отрицания в классической логике: любое чётное число отрицаний можно исключить из состава суждения или включить в состав суждения без изменения значения истинности.

Этот формальный подход к вопросу об отрицании сложился уже в логике Аристотеля, который, по свидетельству Зигварта, «понимал утверждение и отрицание как совершенно параллельные и равноценные формы высказывания, и поэтому он не дал себе достаточного отчёта относительно сущности самого отрицания, даже, строго говоря, не оставил никакого места для отрицания отрицания»[113].

Такая аристотелевская позиция характерна не только для традиционной, но и для классической математической логики, которая с самого начала вводит отрицание в состав основных операций мышления и не интересуется генетическим характером отрицания, тем, каким образом появляется отрицание в процессах рассуждения. В этой логике *duplex negatio* рассматривают либо в качестве следствия закона исключённого третьего, либо как уже сложившейся формальный факт.

Между тем, не одно и то же, возникает ли отрицание из свидетельства чувств, являясь мысленным отражением эмпирического факта, или же оно имеет смысл суждения, противоречащего какому-либо другому суждению, то есть попросту является возражением на какое-либо ранее сделанное утверждение. В первом случае фундаментальным понятием является реализуемая «различимость», во втором, – далеко не всегда реализуемая (поддающююся верификации) гипотеза.

На эту принципиальную разницу в ситуации впервые обратил внимание логиков голландский математик Грисс[114].

Очевидно, что равноправие утверждения и отрицание естественным образом нарушается, когда мысль выходит за пределы элементарной проверяемости и наглядного опыта, когда вопрос об истинности или ложности решается не опытной проверкой, а логическим рассуждением. Тогда правила логики приобретают по существу априорный характер и возникает проблема доверия к этим правилам.

---

[113] *Зигварт Х.* Логика. Т. 1. СПб., 1908. С. 169.

[114] Краткую характеристику его концепции и перечень работ см. в кн.: *Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965; *Новосёлов М.М.* Положительная логика // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967.

На первый взгляд, недоверия к *duplex negatio* не более, чем недоверия к *tertium*, поскольку в рамках интуиционистской и ультраинтуиционистской логики первое выводится из второго, но не наоборот[115] . Однако, если вопрос о принципе исключённого третьего относительно ясен, то вопрос о принципе двойного отрицания, кажется, менее ясен, и в математических доказательствах (и, вообще говоря, не только в них) «постоянно возникают вопросы, касающиеся двойных отрицаний»[116] .

Но если мы отказываемся от *duplex negatio*, мы должны делать явное различие между положительными и отрицательными суждениями и, более того, мы должны теперь также различать положительные и отрицательные определения понятий (операций). В частности, в положительных определениях символ отрицания не должен входить в определяющее выражение (в *difiniendum*).

Следовательно, строго говоря, необходимо различать два вида противоречий и два вида определения отрицания посредством противоречий. А именно, определяя отрицание как $\boldsymbol{A} \supset abs$, мы должны разъяснить, как мы понимаем «абсурд». Обычно это понимается как $\boldsymbol{A}$ & $\neg$ $\boldsymbol{A}$, и определение в этом случае будет отрицательным. Если же мы понимаем *abs* как $0 = 1$, определение отрицания будет положительным. А.Чёрч в своей логике не отмечает этих различий. Он просто вводит константу «ложь», не оговаривая, каким образом мы должны интерпретировать эту ложь.

Впервые на особенность положительного отрицания в арифметике обратила внимание Полетт Феврие, развивая идеи положительной математики (математики без отрицания) Грисса. В частности, она отметила необходимость расширения языка гриссовской логики за счёт введения такого отрицания, которое явно сближает логику Грисса и интуиционистскую логику. «В классической математике, – пишет она, – не придают особой важности различию между положительными и отрицательными определениями. И так как правило двойного отрицания законно в этой математике, всякое предложение в ней одновременно и положительно, и отрицательно. Но это уже не имеет места, если это правило отбрасывается. Различие между положительным и отрицательным является фундаментальным для интуиционизма»[117] .

С интуиционистской (конструктивной) точки зрения семантическое содержание снятия двойного отрицания не имеет достаточных оснований не только в силу его связи с законом исключенного

[115] К слову сказать, я привёл пример трёхзначной логики, в которой доказуема независимость *duplex negatio* от *tertium*.

[116] *Есенин-Вольпин А.С.* Философия, логика, поэзия, права человека. М., 1999. С. 61.

[117] *Destouches-Février P.* Esquisse d’une Mathématique intuitioniste positive // Comptes rendus des séances de l’Académie des sciences. T. 225, № 25. P., 1947.

третьего. Просто эффективно (например, фактически) устанавливаемая ложь в общем случае не совпадает с абсурдностью суждений, получаемых за счёт логической дедукции в косвенных рассуждениях путём *reductio ad absurdum*. А именно эта дедукция является единственным логическим путём введения отрицания в интуиционистских доказательствах, препятствуя чисто формальному использованию альтернативы «истина – ложь».

Как известно, непосредственным следствием непринятия этой альтернативы является интуиционистский отказ от *tertium non datur*[118]. Но если отказ от закона исключённого третьего означает отказ от альтернативы истины и лжи, то отказ от закона снятия двойного отрицания фиксирует особый (неонтологический) статус отрицательных суждений – их нельзя превратить в утвердительные без потери информации о способах реализуемости этих суждений.

В самом деле, с помощью *duplex negatio* допустима та форма косвенного доказательства, когда положительный тезис оправдывается (как истинный) опровержением его отрицания. Но в отсутствии снятия двойного отрицания косвенно доказываются только отрицательные тезисы. Таким образом, в отличие от классической симметрии истины и лжи несимметричность положительной доказуемости и интуиционистской отрицательной опровержимости очевидна.

Смущает, однако, то, что в интуиционистских рассуждениях, строго говоря, «первое» отрицание может появиться только как результат опровержения какой-либо положительной посылки, а двойное отрицание допустимо как следствие той же посылки. Между тем, *reductio ad absurdum* не делает различия между гипотезами $\boldsymbol{A}$ и $\neg\neg\boldsymbol{A}$. В самом деле, чтобы доказать $\neg\boldsymbol{A}$ можно в качестве гипотезы взять как $\boldsymbol{A}$, так и $\neg\neg\boldsymbol{A}$, поскольку интуиционистски верно $\neg\neg\neg\boldsymbol{A} \supset \neg\boldsymbol{A}$.

Остаётся заметить, что в *duplex negatio*, как и в *tertium*, отражается онтологический смысл отрицания, его трансцендентный характер. Отказ от этих принципов приводит естественно к *неонтологической* концепции отрицания, вводя понятие отрицания в контекст гносеологических обсуждений (первым на возможность онтологической и неонтологической трактовки отрицания обратил внимание, по-видимому, Ф.Брэдли[119]).

---

[118] О законе исключённого третьего (tertium) обстоятельно см.: *Есенин-Вольпин А.С.* Принцип исключённого третьего // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967; а также: *Непейвода Н.Н.* Исключённого третьего закон // Новая философская энциклопедия. Т. 2. М., 2001; *Рассел Б.* Исследование значения и истины. М., 1999. Гл. XX.

[119] *Bradley F.H.*, Principles of Logic. N. Y.– L., 1928 (первое издание 1883 г.).

Выше я упомянул об абсолютном характере логического обоснования. Но, вообще говоря, обоснование посредством логической дедукции *относительно* по меньшей мере вот в каком смысле: это обоснование одного суждения с помощью другого (или других) в границах замкнутой дедуктивной системы. Абсолютность выражается здесь только в приведении импликативного отношения основания и следствия (посылки и заключения) к форме логического закона. Косвенные доказательства грешат ещё большей относительностью, поскольку в них нередко приходится прибегать к неосуществимым гипотезам (или построениям). Но принимая гипотезы, мы релятивизируем факт аргументации. «Для всякого, кто не хочет отделаться от проблемы словами, нет другой необходимости, кроме необходимости гипотетической. Ни один тезис нельзя считать необходимым. Мы не знаем другой необходимости, кроме необходимости следствий из некоторой гипотезы»[120].

Введение закона противоречия в логику теории, расширяя возможности обоснования теорем «внутри неё» посредством опровержений, всё же сохраняет *status quo*. Поэтому возникает проблема обоснования и оправдания самой теории. На смену проблемы «непротиворечие в выводах» приходит проблема непротиворечивости теории в целом в качестве критерия её практической значимости, поскольку непротиворечивость абстрактной теории влечёт возможность её модельной выполнимости (теорема Лёвенгейма – Скулема), то есть создаёт условия для изучения модели (если такая будет указана) средствами логики этой теории. Одновременно, в силу наличия модели, непротиворечивость означает также логическую возможность считать такую теорию осмысленной[121].

Вместе с тем непротиворечивость теории, указывая на возможность модели для этой теории, одновременно указывает и на *границы применимости её основных абстракций*, поскольку для большинства дедуктивных теорий с достаточно простым понятием выводимости их непротиворечивость влечёт их неполноту, то есть указывает на факт существования суждений, формализуемых в языке данной теории, но недоказуемых в ней. Об этом говорит первая теорема Гёделя. Почти все теоретически значимые дедуктивные теории (за исключением чистой элементарной логики) отличаются их неполнотой. В этом – *интервальный смысл* всякой достаточно богатой содержательной теории. Ведь совместная реализация непротиворечивости и полноты

[120] *Darbon A.* Les catégories de la modalité. P., 1956. P. 134.
[121] Об этом см. ст.: Непротиворечивость // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967.

была бы свидетельством *абсолютной самообоснованности* их основных абстракций. На деле же непротиворечивость таких теорий может быть обоснована только средствами, которые не являются собственными средствами этих теорий – не формализуемы (не выразимы) в них. Об этом говорит вторая теорема Гёделя.

5.3. Непротиворечивость и интервал абстракции

Как бы ни было велико его значение, факт непротиворечивости не следует рассматривать как априорное условие научной ценности теории. Научную ценность могут представлять и противоречивые, но нетривиальные теории. Если в числе теорем (аксиом) теории отсутствует *ex falso sequitur quodlibet*, то противоречивость не обесценивает ни понятие теоремы теории, ни понятие доказательства в ней. В этом случае наличие противоречия становится всего лишь *посторонней посылкой*[122], которая не влияет на законные выводы этой теории. Поэтому ультраинтуиционизм, для которого программа изучения доказательств в противоречивых теориях представляет научный и философский интерес, не исключает из общей теории дедуктивных систем и изучение противоречивых систем, мотивируя это тем, что такое изучение может содействовать изучению общих дедуктивных свойств непротиворечивости теорий или нахождению новых методов доказательства непротиворечивости.

Наиболее глубокая, из известных мне концепций, связывает вопрос о непротиворечивости с вопросом о допустимых способах рассуждений, а не только с принципиальной недопустимостью противоречий. Способов рассуждений, допустимых, так сказать, абсолютно не существует[123]. Всякое доказательство от каких-либо допущений (гипотез) зависит. Впервые я воспринял это как философский постулат ультраинтуиционистской программы[124], согласно которой доказательства непротиворечивости также зависят от каких-либо допущений, вопрос о тривиальности (очевидности) или нетривиальности которых решается путём произвола.

Всё же замечу, что *de jure* допустимость должна определяться характером «логики вещей», о которых рассуждают (или хотят рассуждать). Чтобы судить о наличии противоречия, необходимо распола-

---

122 Коротко о понятии «посторонняя посылка» см.: Посылка // БСЭ. 3 изд. М., 1975. Т. 20. С. 424.

123 См. в этой связи замечание Д.А.Бочвара // Логические исследования. Вып. 12. С. 237.

124 См.: *Есенин-Вольпин А.С.* Парадокс // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967.

гать средствами получения противоречий и более того – знанием о *достижимости противоречия* этими средствами. К примеру, так называемые непредикативные определения сам Рассел рассматривал как средства получения антиномий, а парадокс Рассела – как свидетельство достижимости противоречия этими средствами. С тех пор едва ли не общепринято считать, что из парадоксального рассуждения «формально и содержательно следует неразрешимое противоречие: $\boldsymbol{A} \,\&\, \neg \boldsymbol{A}$»[125].

Действительно, противоречие обычно мыслится либо как одновременная доказуемость суждений $\boldsymbol{A}$ и $\neg \boldsymbol{A}$, либо как доказуемость их конъюнкции (о чём и говорится выше). Вместе с тем сами парадоксальные рассуждения выглядят по-иному. Они имеют вид конъюнкции пары содержательно выводимых симметричных импликаций $((\boldsymbol{A} \supset \neg \boldsymbol{A})$ и $(\neg \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}))$. Если мы уже имеем противоречие в виде $\boldsymbol{A} \,\&\, \neg \boldsymbol{A}$, то соответствующие импликации мы получаем непосредственно как следствия дедуктивного отношения $\& \vdash \supset$. Однако конъюнкция и импликация не равны дедуктивно. Поэтому мы не можем воспользоваться обратным отношением. Правда, у нас есть возможность непосредственно получить эквивалентность $\boldsymbol{A} \equiv \neg \boldsymbol{A}$. Но эта эквивалентность не даёт нам основания считать доказанными равным образом как $\boldsymbol{A}$, так и $\neg \boldsymbol{A}$, а утверждает лишь их условную зависимость по истинности. Поэтому, чтобы получить желаемое противоречие как конъюнкцию, необходимо парадоксальное умозаключение присоединить к какой-либо логике и дать обычное доказательство из аксиом. А это уже чисто технический вопрос. Например, такое доказательство возможно с использованием аксиомы Зенона, упомянутой выше или с помощью закона тождества и аксиомы силлогизма. Однако я хочу заметить, что сама конъюнкция $((\boldsymbol{A} \supset \neg \boldsymbol{A}) \,\&\, (\neg \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}))$ не принадлежит чистой логике (она недоказуема в ней). Поэтому мне непонятно, почему мы должны рассматривать факт парадоксальных умозаключений (в частности, парадокс Рассела) как угрозу, которая каким-либо образом затрагивает основания логики. На мой взгляд, его можно рассматривать как кризис философии логицизма, но логика логицизма (теоретико-множественная логика), лежит за пределами фактически значимых абстракций чистой элементарной логики.

Как известно, «критерий основания» Протагора связывал допустимость с мнением человека, однако не уточнял основания для этого мнения, на что Платон заметил (как уже отмечалось выше), что основание не должно быть произвольным или заключаться в субъек-

---

125 *Зенкин А.А.* Новый подход к анализу проблемы парадоксов // Вопр. философии. 2000. № 10. С. 79.

тивной воле человека, иначе придётся признать законность противоречий. Эта мысль Платона была «законсервирована» в аристотелевском логическом принципе противоречия и, уже в современной концепции оснований (школой Гильберта), – в методологическом требовании доказательства «абсолютной непротиворечивости» математических теорий.

Однако вполне уместная в области «истин разума» идея непротиворечивости не всегда оправдана в области «фактических истин». Перенесённая из области логики в другие области знания, основанные на других абстракциях, она породила особый «стиль мышления», игнорирующий диалектику *интервальных ситуаций*, в которых критерий Протагора, понятый, однако, более широко, как относительность истины к условиям и средствам её познания, оказывается весьма существенным. Именно поэтому многие рассуждения, приводящие к парадоксам, но в остальном безупречные, по существу только демонстрируют интервальный характер связанных с ними гносеологических ситуаций. Таковы, в частности, известные апории Зенона Элейского или так называемый софизм «куча»: «Одно зерно – не куча. Если n зёрен не куча, то $n + 1$ – тоже не куча. Следовательно, любое число зёрен – не куча». Это лишь один из *парадоксов транзитивности*, возникающих в ситуациях *неразличимости* (или интервального равенства). Последняя служит типичным примером интервальной ситуации, в которой свойство транзитивности равенства при переходе от одного *интервала неразличимости* к другому, вообще говоря, не сохраняется. Поэтому принцип математической индукции в этой ситуации неприменим. Стремление усматривать в такого рода ситуациях свойственное опыту «нетерпимое противоречие» (А.Пуанкаре), которое теоретическая мысль преодолевает в абстрактном понятии математического континуума, не обосновано общим доказательством устранимости подобного рода ситуаций в сфере теоретического (в частности, математического) мышления и опыта. Достаточно сказать, что практика применения столь важных в этой сфере *законов тождества* так же, вообще говоря, как и в сфере опыта, зависит от того, какой смысл вкладывают в выражение «один и тот же объект», какими средствами или критериями при этом пользуются. Так, далеко не всегда нам удаётся *абстракцию неразличимости* заменить *абстракцией отождествления*. А только в этом случае и можно рассчитывать на «преодоление» противоречий типа парадокса транзитивности[126].

[126] Обо всём этом подробно см.: *Новосёлов М.М.* Абстракция в лабиринтах познания (логический анализ). М., 2005.

5.4. Непротиворечивость и «собственный универсум» логики

Теперь, в связи с проблемой непротиворечивости, я хочу сделать несколько замечаний по теме «предметная область» (или «универсум рассуждения»)[127], поскольку эта тема является одной из важнейших в логике и логической семантике. Существуют различные концепции предметной области, различные точки зрения на это понятие, а их общая идеология тесно связана с техникой логического анализа. Но я затрону здесь лишь один вопрос, которого я однажды касался, но касался мимоходом в связи с обсуждением проблемы тождества [128].

Прошло время, когда логика считалась наукой «обо всём» по крайней мере в том смысле, что это наука о законах мышления, а законы мышления непременно должны соблюдаться (быть значимы), о чём бы ни шла речь. Тяжба формальной логики и диалектики в данном случае несущественна, поскольку идеологией обеих был панлогизм. Естественно, что универсум речи чистой логики при этом представлялся любым, оставаясь «полностью неопределённым, совершенно неограниченным или открытым»[129].

С появлением математической логики такому подходу способствовал расселовский логицизм. Исключением единичных объектов (в пользу индивидных дескрипций) онтология по существу была элиминирована из логической теории. В её логицистском варианте логика поглощала и математику, сводя её к системе формальных импликаций, «верных вообще во всех “возможных мирах”, и потому ничего не говорящих нам о мире, в котором мы живём и действуем»[130].

Точнее было бы сказать, что логицизм был не против онтологии самой по себе. Он ратовал лишь за невмешательство логики в её онтологический статус в связи с его неопределённостью и туманностью. Логицизм жертвовал онтологией в пользу лингвистического анализа как вещи более надёжной и более соответствующей точному характеру логической науки.

Понятно, однако, что с потерей онтологии терялась проблема истинности в её содержательном понимании, характерном, к примеру, для естествознания. Что это значило для логики легко понять, если

---

[127] Из отечественных мне знакомы только две работы, посвящённые этой теме специально: *Бирюков Б.В.* Крушение метафизической концепции универсальности предметной области в логике. М., 1963; *Бессонов А.В.* Предметная область в логической семантике. Новосибирск, 1985.

[128] См.: Философская Энциклопедия. Т. 5. М., 1970. С. 239.

[129] Эти слова Э.Шрёдера цит. по кн.: *Бирюков Б.В.* Крушение... М., 1963. С. 39.

[130] *Яновская С.А.*, Логицизм // Философская энциклопедия. Т. 3. М., 1964. С. 228.

согласиться с мнением Фреге, считавшего познание законов истинности основной проблемой логики. Вернуть эту проблему для логики на ранних этапах её развития помог интуиционизм, для которого постановка этой проблемы необходимо связана с существованием внешнего мира. Правда, определение истинности варьирует согласно философской точке зрения, но оно неизменно предполагает некоторую концепцию реальности; и здесь, замечает А.Гейтинг, мы приходим к тому, что логика для её интерпретации нуждается в онтологии [131].

Похоже, что сегодня мы избавлены от прошлых «неопределённостей роста». Общие вопросы онтологии перешли в ведомство философской логики и, следовательно, остались предметом для философских дискуссий. А что касается универсума речи (или предметной области), то он, сделавшись неотъемлемой частью теории моделей, приобрёл вполне определённые черты. Теперь он занимает почётное место в (предикатной) сигнатуре той или иной модели (реальности), о которой идёт речь, и в этом смысле (характером заданных предикатов и аксиом) вполне избавлен от неопределённости, на которую указывал Шрёдер, даже если на природу универсума не накладывается никаких конструктивных ограничений.

Тем не менее, существенно, что универсумы моделей, о которых идёт речь в теории моделей, и которые служат для определения истинности формул логического языка, сами-то, вообще говоря, лежат вне чистой логики. Это именно та внешняя реальность, которая подразумевалась в приведённом выше замечании Гейтинга. При этом естественно возникает вопрос, а есть ли у чистой логики «собственный универсум»? Является ли эта логика сама по себе онтологической теорией или же это чисто гносеологический (неонтологический) феномен?

Говоря о «чистой логике», я имею в виду элементарную логику (то есть чистую первопорядковую логику предикатов с равенством) не только потому, что она лежит в основе изучения всех основных математических теорий, которые формализуются в языках первой ступени, но прежде всего потому, что с непротиворечивостью именно узкого исчисления предикатов естественно связывается понятие о собственном универсуме.

Если иметь в виду понятие об универсуме (о предметной области) вообще, то необходимость в его точной характеризации возникает в связи с необходимостью введения понятия модели при семантической интерпретации первопорядкового языка. А до этого момента считается вполне достаточным (чтобы оправдать *dictum de omni*) по-

131 *Heyting A.*, La conception intuitionniste de la Logique // Les Etudes philosophiques. 1956. № 2. P. 226.

стулат о непустоте универсума речи, который в этом случае мыслится совершенно неопределённым. Как замечает Дж.Шенфилд, это в сущности только соглашение, оно является чисто «техническим соглашением», которое «не исключает ни одного интересного случая»[132].

Вопрос об «интересных случаях» – это вопрос особый. Возможно, что логика с пустым универсумом тоже случай интересный[133]. И случай с одноэлементным универсумом для меня тоже случай интересный. Его-то я и собираюсь обсудить ниже.

Для начала замечу, что, ограничиваясь чистой логикой, мы должны признать очевидный факт – реальная онтология вносится в процедуру интерпретации извне, а не является частью самого первопорядкового языка, у которого по существу нет «внутренней семантики». Если же мы хотим иметь нетривиальную онтологию самой логики как проекцию логического языка, мы должны расширить язык таким образом, чтобы он содержал индивидные символы и индивидуальные предикаты, определяющие и различающие элементы универсума, то есть характеризующие самый этот универсум. Когда это делается, вместо чистой логики мы получаем прикладную.

Все проблемы философской онтологии и логической семантики, включая логические парадоксы и так называемые проблемы «существования» и «онтологической относительности», ставятся и решаются в прикладной логике. Это очень важное обстоятельство, о чём я ещё скажу ниже.

Казалось бы, что и проблему непротиворечивости первопорядковой логики тоже стоит отнести сюда, то есть поставить непротиворечивость в зависимость от числа и характера индивидов универсума. С ультраинтуиционистской точки зрения это тоже, кажется, должно быть так. Но мы знаем, что там речь идёт не о чистой логике, а о прикладной логике – о теории множеств. А об этом совсем другой разговор. В чистой первопорядковой логике проблема непротиворечивости, к счастью, решается, так сказать, на пропозициональном уровне.

Впрочем, как отмечают авторы этого решения, значение этого доказательства непротиворечивости не следует переоценивать, поскольку оно «*содержательно* (курсив мой. – *М.Н.*) сводится к допущению, что положенная в основу область индивидов состоит только из одного единственного элемента»[134].

---

[132] *Шенфилд Дж.* Математическая логика. М., 1975. С. 25.

[133] Я изучал логику неразличимостей именно как (бескванторую) логику с отношениями неразличимости, заданными «ни на чём». А вопрос о правилах для кванторов при пустом универсуме тоже обсуждался неоднократно. См.: *Войшвилло Е.К.* Проблема непустоты субъектов высказываний (суждений) // Логика и В.Е.К. М., 2003.

[134] *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. М., 1947. С.118.

А это означает, что редукция к семантическому варианту всё же имеет место и здесь, и вопрос только в том, насколько общим (или убедительным) можно считать такое доказательство.

Чтобы ответить на этот вопрос, как и на те, что были поставлены выше, полезно вспомнить способ рассуждения, который применил А.Эйнштейн, привлекая на помощь двух наблюдателей: одного в вагоне поезда, другого – около полотна железной дороги[135] . Тогда мы поймём, что, как не существует траектории самой по себе, так равным образом не существует и универсума самого по себе, если мы хотим говорить об универсуме, создаваемом языком какой-либо теории.

Все, до сих пор известные мне, разговоры о логической онтологии – это разговоры с позиции наблюдателя у полотна железной дороги, с позиции «извне». Я же предлагаю встать на позицию наблюдателя, который находится в вагоне поезда, на позицию «внутри». Применительно к нашей ситуации такой наблюдатель располагает только тавтологиями логического языка. Эти формулы чистой логики сами по себе ничего не говорят о числе (а, следовательно, и о различии) объектов универсума, они *безразличны* к какому-либо разнообразию. Но если их использовать как дискриминирующие признаки в актах отождествления (например, согласно обычному определению тождества), то, при условии непустоты «на входе», они дадут *одноэлементный* универсум «на выходе». Именно этот универсум, возникающий как результат абстракции отождествления по тавтологическим признакам, я и называю *собственным универсумом* чистой логики. В известном смысле его можно назвать и *виртуальным* универсумом.

О том, что я не сегодня пришёл к понятию о собственном универсуме чистой логики, напоминает следующий текст: «если условие ***A*** *– тавтология*, то в подразумеваемой предметной области все предметы тождественны в интервале ***A***. Иначе говоря, тавтологии не могут служить критерием различимости объектов, они как бы проектируют универсум в точку, производя абстракцию отождествления элементов множества любой мощности, «“превращая” разные элементы в “один и тот же” абстрактный объект»[136] .

Хотя такая трактовка онтологического статуса чистой элементарной логики (по существу его непризнание) не совпадает с общепринятой, согласно которой «из общих логических аксиом ничего не вытекает относительно того, какие предметы и сколько их существу-

[135] *Эйнштейн А.* Физика и реальность. М., 1965. С. 171–172.
[136] *Новосёлов М.М.* Тождество // Философская энциклопедия. Т. 5. М., 1970. С. 239.

ет в том поле..., к которому относятся наши высказывания и предикаты»[137], я считаю, что понятие о собственном универсуме чистой элементарной логики полезно и сродни тем, что всегда появляются, когда необходимо завершить обобщение уже существующих понятий. Так, мы говорим, что бесконечно большая величина $\boldsymbol{x}_n$ имеет пределом $+\infty$, хотя на самом деле она не имеет никакого предела. Но $+\infty$ не пустое понятие. У него, как равным образом и у понятия отрицательной бесконечности, есть ясный конечный геометрический образ на окружности фон Неймана. Замечу, что в результате введения этих двух «несобственных» символов реализуется «догма об окружности» – «крайности сходятся» и создаётся наглядный образ замкнутости (совершенства) множества вещественных чисел. Известно, что по понятиям древних, окружность – самая совершенная фигура.

Хотя тавтологии не пригодны в качестве «приборов анализаторов» предметных областей, они вполне могут служить в качестве «приборов преобразователей» предметных областей любой природы[138]. И они это делают, *ipso facto* избавляя нас от противоречий в результате их применения. Вот почему непротиворечивость чистого исчисления предикатов, установленную на одноэлементной области, я считаю достаточной и *установленной абсолютно.* В качестве следствия, я полагаю, что чистая логика не несёт и не может нести ответственность за противоречия (парадоксы), возникающие при расширении её лексики. При любом таком расширении мы видим гораздо больше, чем собственный универсум логики, поскольку используем для отождествлений и различений уже индивидуальные предикаты. Следовательно, мы находимся в условиях *другого интервала абстракции* отождествления, чем тот, который дают тавтологии.

Потому-то, кстати, и нельзя построить контрпример для тавтологии. Приступая к построению (поиску) контрпримера, мы становимся на позицию наблюдателя у полотна железной дороги, мы предполагаем заведомое существование источника, из которого в ходе оценки формул мы черпаем необходимые нам определённые и вполне различимые элементы. Мы испытываем формулу, чтобы выяснить, способна ли она различать предметы. И если обнаруживаем, что нет, то объявляем её тавтологией.

К примеру, пусть формула $\boldsymbol{A}$ выполнима, но не является тавтологией. Тогда формула $\neg \boldsymbol{A}$ тоже выполнима и выполнима как раз в универсуме контрпримера для $\boldsymbol{A}$. Следовательно, выполнимость $\neg \boldsymbol{A}$ эквивалентна высказыванию о минимальном числе «различимых»

---

[137] *Новиков П.С.* Элементы математической логики. М., 1959. С. 215.

[138] По терминологии статьи: *Лазарев Ф.В., Трифонова М.К.,* Роль приборов в познании и их классификация // Филос. науки (НДВШ). 1970. № 6.

индивидов, необходимых для построения контрпримера для ***A.*** Отсюда мы естественно получаем чисто *гносеологическое следствие* – суждение, которое даёт информацию о различимости объектов, не может быть тождественной истиной.

Вместе с тем, ясно, почему теоремы чистой логики обычно выводят из-под юрисдикции общего правила, согласно которому постулирование общезначимости (выполнимости) какой-либо логической формулы равносильно утверждению о числе элементов в универсуме речи. Тут мы говорим о формулах, которые не принадлежат чистой логике, но сформулированы на её языке.

С другой стороны, если бы тавтологии чистой логики были общезначимы только в собственном универсуме, чистая логика потеряла бы всякий теоретический интерес. Более того, если бы мы допустили такой контрафактический случай, формула $\neg$ ***A*** (где ***A*** – некая «сумасшедшая» тавтология) потеряла бы статус тождественной лжи. Поэтому добавление ***A*** в качестве общезначимой формулы к аксиомам теории, в которой выполнима $\neg$ ***A***, приводило бы нас к прямому противоречию. Во избежание противоречий виртуальный универсум не должен влиять на действительный универсум модели, когда логика становится прикладной.

То, что тавтологии могут добавляться в любом случае в качестве общезначимых формул, не порождая противоречий, объясняется их неспособностью различать индивидуальные объекты любого универсума любой модели. В одноэлементном мире, как это я уже заметил однажды, отношения тождества и различия сами неразличимы[139].

Конечно, если некоторую формулу ***A*** понимать просто как выполнимую, то, возможно, «внутри» теории, найдутся условия (при различных основаниях для отождествлений) для выполнимости как ***A***, так и $\neg$ ***A***. Однако этот факт следует рассматривать не как противоречие, а только как *дополнительность* ситуаций, соответствующих этим формулам внутри данной теории. Например, такая ситуация вполне возможна в ультраинтуиционистской арифметике при наличии неизоморфных натуральных рядов.

Вообще, если формула только k-общезначима, её добавление в качестве $(n + k)$-общезначимой к теоремам теории с областью из $(n + k)$ индивидов при $n \geq 1$ приводит к противоречию. Но добавление этой же формулы в тех же условиях в качестве только выполнимой (что логически вполне оправдано) отвечает ситуации дополнительности, то есть соответствует одновременной фактической истинности как ***A***, так и $\neg$ ***A*** в *разных интервалах абстракции*. Фиксирование таких

---

[139] Кибернетика и современное научное познание. М., 1976. С. 260.

интервалов здесь обязательно, поскольку использование формул, не являющихся тавтологиями, связано с иным применением абстракции отождествления, чем то, которое определяется языковыми средствами чистой логики.

Итак, просуммирую некоторые следствия из сказанного:

1. Собственный универсум элементарной логики существует как гносеологическое понятие – как результат абстракции неразличимости элементов любой наперёд заданной онтологической области индивидов. Поэтому я и назваю его *гносеологическим универсумом*, а чистую логику – *неонтологической* теорией.

2. Все теоремы элементарной логики общезначимы в её «собственном универсуме» (тривиальное следствие метатеоремы о полноте).

3. Не каждая формула, общезначимая в собственном универсуме чистой логики, выводима из аксиом этой логики (неполнота в узком смысле).

4. Каждое расширение чистой первопорядковой логики присоединением формул, общезначимых в собственной области, непротиворечиво (следствие доказательства непротиворечивости).

5. Противоречивость теорий (появление парадоксов), основанных на элементарной логике, возможна, в частности, при игнорировании интервалов абстракции отождествления (или неразличимости) за счёт формул, не общезначимых в собственной области.

Обычно, говоря о тождестве или различии, для суждения о различии индивидов мы руководствуемся скрытой посылкой о наличии различающих предикатов. Контрапозиция этой посылки говорит о том, что мы «слепнем» без таких предикатов, и подобной слепотой отличаются все тавтологии чистой логики. Выразительные возможности логической теории тождества заметно богаче тех, что предлагает нам семантика общезначимых истин, а ценность этой теории – в её приложимости к миру фактических истин, где суждения о тождестве и различии индивидов не являются тавтологичными.

Всё сказанное может показаться тривиальным. И всё же замечу, что интервальная аргументация, использующая представления «внутри» и «снаружи», позволяет яснее понять отношение чистой формальной логики к онтологии, отделить лингвистические аспекты этого отношения от собственно модельных и гносеологических, и нередко избежать явных недоразумений там, где возникают противоречивые ситуации при совершении тех или иных актов отождествлений. А этим, в частности, решается и философская задача – показать, что «онтология гносеологична», и сделать «онтологические предпосылки... как можно более осмысленными»[140].

---

[140] *Бердяев Н.А.* Философия свободы. Смысл творчества. М., 1989. С. 101.

Оглавление

Научное издание

Новосёлов Михаил Михайлович

Беседы о логике

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

В авторской редакции

Художник *В.К. Кузнецов*

Технический редактор *А.В. Сафонова*

Корректура автора

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 12.10.06.
Формат 60x84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Ньютон.
Усл. печ. л. 4,96. Уч.-изд. л. 8,72. Тираж 500 экз. Заказ № 020.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерный набор автора
Компьютерная верстка *Ю.А. Аношина*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119992, Москва, Волхонка, 14

Готовятся к печати книги:

1. **Бибихин В.В. Ведение в философию права** /РАН. Ин-т философии. – М.: ИФ РАН, 2005. – 345 с.
2. **Горелов А.А. Индивидуальность и эволюция** /РАН. Ин-т философии. – М.: ИФ РАН, 2006. – 162 с.
3. **История философии. № 12 /РАН. Ин-т философии; Отв. ред. Т.А.Дмитриев.** – М.: ИФ РАН, 2005. – 243 с.
4. **Куценко Н.А. Духовно-академическая философия в России первой половины XIX века: киевская и петербургская школы (Новые материалы)** /РАН. Ин-т философии. – М.: ИФ РАН, 2005. – 138 с.
5. **Лазарев В.В. Этическая мысль в Германии и России. Осмысление фихтеанства русскими философами конца XIX – начала XX в.** /РАН. Ин-т философии. – М.: ИФ РАН, 2006. – 221 с.
6. **Модернизация общества и экология. Ч. I** /РАН. Ин-т философии; Отв. ред. О.Е. Баксанский. – М.: ИФ РАН, 2006. – 244 с.
7. **Морозов Ф.М. Схемы как средство описания деятельности (эпистемологический анализ)** /РАН. Ин-т философии. – М.: ИФ РАН, 2005. – 181 с.
8. **Ориентиры… Вып. 3** /РАН. Ин-т философии; Отв. ред. Т.Б. Любимова. – М.: ИФ РАН, 2006. – 268 с.
9. **Панарин А.С. Русская культура перед вызовом постмодернизма** /РАН. Ин-т философии. – М.: ИФ РАН, 2005. – 188 с.
10. **Розин В.М. Понятие и современные концепции техники** /РАН. Ин-т философии. – М.: ИФ РАН, 2006. – 255 с.
11. **Философия науки. Вып. 11: Этос науки на рубеже веков** /РАН. Ин-т философии; Отв. ред. Л.П. Киященко. – М.: ИФ РАН, 2005. – 341 с.
12. **Шалак В.И. Логический анализ сети Интернет** /РАН. Ин-т философии. – М.: ИФ РАН, 2005. – 96 с.