Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences

LOGICAL INVESTIGATIONS

Volume 23. Number 1

Moscow
2017

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт философии Российской академии наук

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Том 23. Номер 1

Москва
2017

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Logical Investigations

Scientific-Theoretical Journal

2017. Volume 23. Number 1

Publisher: Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

Frequency: 2 times per year

First issue: 1993; the journal is a redesigned continuation of the annual *Logical Investigations* that has been published since 1993 till 2015

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media (Roskomnadzor). The Mass Media Registration Certificate No. FS77-61228 on April 3, 2015

Abstracting and indexing: *Zentralblatt MATH*, *Mathematical Reviews*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

The journal is included in the list of peer-reviewed scientific editions acknowledged by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Subscription index in the United Catalogue *The Russian Press* is 42046

All materials published in *Logical Investigations* undergo peer review process

Editorial address: 12/1 Goncharnaya St., Moscow 109240, Russian Federation
Tel.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** `logicalinvestigations@gmail.com`
Website: `http://eng.iph.ras.ru/log_inv.htm`

ISSN 2074-1472 (Print)
ISSN 2413-2713 (Online)

Логические исследования

Научно-теоретический журнал

2017. Том 23. Номер 1

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Периодичность: 2 раза в год

Выходит с 1993 г.; журнал является прямым продолжением ежегодника «Логические исследования», издававшегося с 1993 по 2015 г.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03 апреля 2015 г.

Журнал реферируется и индексируется: *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt MATH*, *Ulrich's Periodicals Directory*, *РИНЦ*, *EBSCOhost (Philosopher's Index with Full Text)*

Журнал включен в Перечень российских рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук (группа научных специальностей «09.00.00. – философские науки»)

Подписной индекс в Объединенном каталоге «Пресса России» — 42046

Публикуемые материалы прошли процедуру рецензирования и экспертного отбора

Адрес редакции: Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1, оф. 308
Тел.: +7 (495) 697-96-65; **e-mail:** logicalinvestigations@gmail.com
Сайт: http://iph.ras.ru/login.htm

TABLE OF CONTENTS

В НОМЕРЕ

Неклассическая логика

Философская логика

История логики

Елена Дмитриевна
СМИРНОВА
(28.04.1929 – 17.02.2017)

Российская философия и логика понесли невосполнимую утрату. 17 февраля 2017 года ушла из жизни выдающийся ученый и педагог Елена Дмитриевна Смирнова — профессор кафедры логики философского факультета МГУ, заслуженный профессор Московского университета.

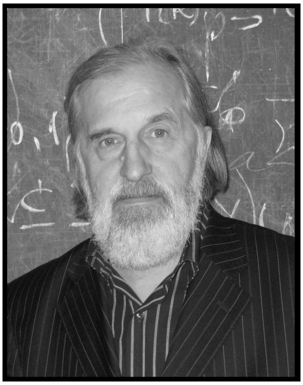
Окончив философский факультет МГУ в 1954 году и — после недолгой работы в Томске — аспирантуру факультета в 1963 году, Елена Дмитриевна навсегда связала свою судьбу с кафедрой логики, где прошла путь от ассистента до профессора. Ее глубокие по содержанию лекционные курсы, фундаментальные монографии и многочисленные статьи, кропотливая индивидуальная работа со студентами и аспирантами внесли существенный вклад в творческое становление нескольких поколений логиков-философов.

Благодаря неутомимой педагогической деятельности Елены Дмитриевны сложилась оригинальная научная школа, занимающаяся разработкой проблем логической семантики, логического анализа естественного языка и философии логики. Ее ученики работают в ведущих учебных и исследовательских центрах как в нашей стране, так и за рубежом.

В 1996 году после кончины своего мужа Владимира Александровича Смирнова Елена Дмитриевна посвятила все свои силы продолжению его дела: несколько лет руководила сектором логики Института философии РАН, вошла в редколлегию «Логических исследований» и до 1999 года была соредактором этого издания, была инициатором проведения Смирновских чтений по логике.

В нашей памяти Елена Дмитриевна останется человеком широкой и щедрой души, которую всю, без остатка отдавала ученикам, своим личным примером, беззаветным отношением к профессии прививая им высокие нравственные качества Человека и Ученого.

В.И. Маркин



Александр Степанович
КАРПЕНКО
(07.04.1946 – 07.02.2017)

7 февраля 2017 года не стало Александра Степановича Карпенко. Трудно переоценить тяжесть потери, которую понесли близкие родственники, друзья, коллеги, все российское логическое сообщество.

Александр Степанович пришел в Институт философии в 1977 году и активно работал в секторе логики в течение сорока лет. Последние семнадцать лет он был заведующим сектором. Многие благодарны ему за то, что он помог им состояться как логикам, помог защитить диссертации и остаться работать в нашей науке. На протяжение многих лет он читал курс многозначной логики на философском факультете МГУ и сумел увлечь ею многих своих учеников. Не будет преувеличением сказать, что Александр Степанович стал основоположником российской школы многозначной логики. Его перу принадлежит ряд учебников и монографий по этому предмету, которые были изданы и получили высокую оценку не только в России, но и за рубежом.

Талант Александра Степановича и любовь к логике проявились не только в научной, но и в организаторской работе. Он был неизменным участником и организатором многих российских и международных научных конференций по логике и методологии науки. С 1997 он был ответственным редактором ежегодника «Логические исследования» и добился того, что сборник стал удовлетворять всем требованиям для рецензирования и публикации в нем работ, необходимых при защите диссертаций. С 2015 года сборник превратился в одноименный журнал с двумя выпусками в год. Главным редактором его стал Александр Степанович.

И вот теперь в этом журнале мы публикуем некролог памяти Александра Степановича Карпенко. Мы действительно будем помнить его.

Сотрудники сектора логики ИФ РАН

Логические исследования
2017. Т. 23. № 1. С. 11–47
УДК 167.07+510.635

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 1, pp. 11–47
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-1-11-47

Неклассическая логика
Non-classical Logic

Л.Ю. Девяткин

Неклассические модификации многозначных матриц классической логики. Часть II

Девяткин Леонид Юрьевич
Сектор логики, Институт философии РАН
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: leoniddevyatkin@gmail.com

Данная статья является второй в дилогии, посвященной многозначным матрицам классической пропозициональной логики как инструменту построения и анализа неклассических логик. В литературе существует множество пар трехзначных матриц, различающихся лишь классами выделенных значений. Но подавляющее большинство из них задает неклассическое отношение следования как при одном выделенном значении, так и при двух. Однако существуют матрицы неклассических логик, полученные из матриц классической логики сужением или расширением класса выделенных значений. Основная часть статьи посвящена двум классам матриц. Первый класс состоит из матриц, которые задавали бы классическое отношение следования при $D = \{1, 2\}$, однако рассматриваются с $D = \{2\}$. Второй класс получен выбором $D = \{1, 2\}$ в матрицах, порождающих классическое следование при $D = \{2\}$. Для изучаемых матриц доказывается максимальность (в сильном смысле) паранепротиворечивости или параполноты задаваемых ими логик, а также аналоги теоремы Гливенко или дуальной теоремы Гливенко. Матрицы в рассматриваемых классах образуют решетки по отношению функциональной вложимости. Отдельные матрицы, полученные из матриц классической логики модификацией множества выделенных значений, имеют эквивалентные формулировки в виде функциональных расширений матриц классической логики.

Ключевые слова: многозначные логики, логические матрицы, паранепротиворечивость, параполнота

1. Введение

Хорошо известно, что на основе одной и той же алгебры можно построить матрицы, задающие разные логики. В этом случае различия между логиками определяются выбором классов выделенных значений. В Части I работы мы неоднократно сталкивались с примерами таких матриц. В частности, это $Ł_3$ и J_3, B_3 и S_3, P^1 и I^1, K_3 и LP.

Зачастую матрицы, различающиеся лишь классами выделенных значений, бывают построены независимо, и их функциональную эквивалентность открывают позже. Так, матрица J_3 была впервые предложена в 1970 г. [23], однако первое известное автору указание на ее связь с $Ł_3$ относится к 1985 г. [22]. Матрица S_3 строилась К. Сегербергом в [49] как расширение матрицы С. Холдена, вне связи с B_3. Как указывают А.С. Карпенко и Н. Томова [6, §2.5], взаимовыразимость операций P^1 и I^1 была явным образом установлена только в 2000 г.

В то же время Г. Прист изначально строит LP, расширяя класс выделенных значений матрицы K_3 [43]. Эти две матрицы нередко рассматривают параллельно. Во-первых, они могут трактоваться как подматрицы четырехзначной матрицы Данна и Белнапа B_4 (см., например, [44], [54]). В этом случае промежуточное значение в K_3 трактуется как «ни истинно, ни ложно», а в LP — как «истинно и ложно одновременно». Альтернативную трактовку дает Д. Рипли [48]. Он в обоих случаях интерпретирует промежуточное значение как «истинно и ложно одновременно», а различие между матрицами вытекает из критериев выбора выделенных значений. В случае K_3 предложению приписывается выделенное значение, если оно по меньшей мере истинно. В случае LP — если оно не ложно.

В общих терминах влияние выбора класса выделенных значений на свойства логики, задаваемой матрицей, анализируется в книге Р.Л. Эпштейна [24, p. 285–287]. Автор обращает внимание на то, что условия стандартности Россера–Тюркетта могут нарушаться двумя способами: операция многозначной матрицы может принимать невыделенное значение, когда, согласно соответствующему условию стандартности, должна была принять выделенное, или она может принимать выделенное значение на значениях аргументов, для которых выполнение условия стандартности требовало бы невыделенного значения. Следуя этой линии рассуждения, А. Бруннер и В. Карниэлли пишут [16]: «Интуиционистские логики являются “ложными по умолчанию” (в том смысле, что предложение и его отрицание могут оба приниматься как ложные), в то время как паранепротиворечивые логики являются “истинными по умолчанию” (в том смысле, что предложение и его отрицание могут оба приниматься как истинные)» (пер. автора).

Все трехзначные матрицы неклассических логик, которые мы рассматривали до этого, задают неклассическое отношение логического следования вне зависимости от выбора класса выделенных значений. Все они содержат операции, которые делают их «ложными по умолчанию» или «истинными по умолчанию» в смысле Бруннера и Карниэлли при $D = \{2\}$ и $D = \{1, 2\}$. В некоторых случаях это инволюция, а в остальных это пара отрицаний из P^1 и I^1. Однако в литературе есть и отдельные примеры матриц, которые получены из матриц классической логики одним лишь изменением класса выделенных значений, без изменения операций. Матрица, в которой все операции отвечают условиям стандартности при $D = \{2\}$ приобретает «истинные по умолчанию» операции, когда происходит «переоценка» невыделенного промежуточного значения. В свою очередь, матрица, в которой все операции отвечают условиям стандартности при $D = \{1, 2\}$ приобретает «ложные по умолчанию» операции, когда происходит «недооценка» выделенного промежуточного значения. Настоящая работа посвящена систематическому изучению матриц такого типа.

Материал организован следующим образом. В оставшейся части введения я рассматриваю примеры интересующих нас матриц, известные в литературе. Это последовательность матриц Гёделя, «ненормальная характеристическая матрица классической логики» А. Чёрча, а также матрица логики рационального агента Е.А. Кубышкиной и Д.В. Зайцева. После этого я определяю два дуальных класса трехзначных матриц, которые получены из матриц классической логики «недооценкой» и «переоценкой» промежуточных значений, эти классы обозначаются как TL_1 и TL_2 соответственно. Далее, исследуются свойства логик, задаваемых матрицами из этих классов. Показано, что матрицы из класса TL_2 задают логики, максимально паранепротиворечивые в сильном смысле, согласно определению О. Ариэли и соавторов. В силу дуальности, матрицы из класса TL_1 задают логики, максимально параполные в сильном смысле. Доказывается ряд утверждений, выступающих аналогами теоремы Гливенко и дуальной теоремы Гливенко. Потом я перехожу к рассмотрению функциональных свойств исследуемых матриц. Элементы классов TL_1 и TL_2 образуют решетки по отношению функциональной вложимости. А их подклассы C-расширяющих матриц — собственные подрешетки соответствующих решеток. Кроме того, я демонстрирую, что некоторые из матриц, полученных «недооценкой» или «переоценкой» промежуточных значений могут быть также представлены как функциональные расширения матриц классической логики. Заключение посвящено проблемам обобщения результатов, изложенных в Части I и Части II работы.

Предполагается знакомство читателя с предыдущей частью статьи, в ней можно найти все недостающие определения и ссылки, необходимые для понимания настоящего текста.

Теперь перейдем к рассмотрению примеров матриц с «недооценкой» и «переоценкой» промежуточных значений. Исторически первый пример дают нам многозначные матрицы Гёделя. Операции матрицы $G_n = \langle\{0, 1, \ldots, n-1\}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \{n-1\}\rangle$ отвечают следующим условиям [27]:

$$a \wedge b = min(a, b);\ a \vee b = max(a, b);$$
$$a \Rightarrow b = \begin{cases} n-1, \text{если } a \leq b; \\ b, \text{если } a > b. \end{cases} \qquad \neg a = \begin{cases} 0, \text{если } a \neq 0; \\ n-1, \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Для трехзначной матрицы $G_3 = \langle\{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \{2\}\rangle$ получаем следующие таблицы:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\Rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

	$\neg x$
0	2
1	0
2	0

Нетрудно увидеть, что при $D = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ (в трехзначном случае — {1,2}) операции G_n отвечают условию стандартности Россера–Тюркетта[1]. Таким образом, матрицы Гёделя получены из матриц классической логики «недооценкой» промежуточных значений.

Бруннер и Карниэлли сопоставляют последовательности матриц Гёделя последовательность дуальных «анти-интуиционистских» матриц [16]. Она состоит из матриц вида $G_n^* = \langle\{0, 1, \ldots, n-1\}, \wedge, \vee, -, \neg^*, \{1, \ldots, n-1\}\rangle$, где операции отвечают следующим условиям:

$$a \wedge b = min(a, b);\ a \vee b = max(a, b);$$
$$a - b = \begin{cases} 0, \text{если } a \leq b; \\ a, \text{если } a > b. \end{cases} \qquad \neg^* a = \begin{cases} 0, \text{если } a = n-1; \\ n-1, \text{если } a \neq n-1. \end{cases}$$

Использование операции $x - y$, которую называют «псевдоразностью» или «исключением», в качестве дуала $x \Rightarrow y$ восходит к работе МакКинси и Тарского [41]. Такой подход является обычным в работах по данной теме (см., например, [46], [28], [57], [29], [58]). Однако отметим, вслед за Т. Фергюсоном [25], что не существует такой функции ι на $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, для которой $\iota(\iota(x) \Rightarrow \iota(y)) = (x - y)$ или $\iota(\iota(x) - \iota(y)) = (x \Rightarrow y)$, и в то же время для инволюции $\sim$ выполняются тождества: $\sim(\sim x \Rightarrow \sim y) = (y - x)$; $\sim(\sim y - \sim x) = (x \Rightarrow y)$. Поэтому, принимая во внимание построения, касающиеся дуализации, из Части I данной работы[2], в качестве дуала $x \Rightarrow y$ я буду рассматривать операцию $x \Leftarrow y = y - x$, как это делают А. Монтейро [42, Th. 2.6] и А.С. Карпенко [5]. Она отвечает следующему условию:

$$a \Leftarrow b = \begin{cases} 0, \text{если } a \geq b; \\ b, \text{если } a < b. \end{cases}$$

Для наглядности, рассмотрим трехзначную матрицу $G_3^* = \langle\{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \leftarrow, \neg^*, \{1, 2\}\rangle$. Таблицы для $\Leftarrow$, $\neg^*$ таковы:

[1] См. Часть I.

[2] См. также [39].

$\Leftarrow$	0	1	2
0	0	1	2
1	0	0	2
2	0	0	0

	$\neg^* x$
0	2
1	2
2	0

Ясно, что при $D = \{n-1\}$ (в трехзначном случае — $\{2\}$) операции G_n^* отвечают условию стандартности Россера–Тюркетта. То есть, матрицы вида G_n^* получены из матриц классической логики в результате «переоценки» промежуточных значений.

В работе [18] А. Чёрч приводит еще одну матрицу интересующего нас типа. В цитируемой статье автор рассматривает матрицы, которые не являются «нормальными в смысле Карнапа», и в то же время являются характеристическим для классической пропозициональной логики. Матрица является «нормальной» в смысле Карнапа, если и только если она является «стандартной» в смысле Россера–Тюркетта. Матрица называется характеристической для некоторого исчисления, если и только если класс ее законов совпадает с классом теорем данного исчисления. В качестве одного из примеров Чёрч рассматривает матрицу, где $D = \{2\}$, а операции определяются такими таблицами:

$\wedge^\diamond$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	2
2	0	2	2

$\vee^\diamond$	0	1	2
0	0	2	2
1	2	2	2
2	2	2	2

$\supset^\diamond$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	2	2

	$\neg^\diamond x$
0	2
1	0
2	0

Такую же матрицу рассматривал Н. Решер как «слабый» вариант логики Лукасевича [47, p. 32–33]. А.С. Карпенко обратил внимание на то, что аналогичные операции выразимы и в матрице Бочвара B_3, образуя второй набор «внешних» операций [5, с. 53]. Таким образом, как указал Карпенко, логика Бочвара содержит не один фрагмент, изоморфный классическому исчислению высказываний, а два — заданный матрицей $B_3^\Box$ с внешними операциями, определенными самим Бочваром, и $B_3^\diamond$ с операциями, отвечающими таблицам, изображенным выше.

Как и в случае матриц Гёделя, матрице $B_3^\diamond$ можно сопоставить дуальную ей. В работе [2] рассматривается матрица с $D = \{1, 2\}$ и следующими операциями:

$\wedge^\square$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	2

$\vee^\square$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	2	2	2

$\supset^\square$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	0	2

	$\neg^\square x$
0	2
1	2
2	0

Нетрудно убедиться, что выполняются следующие тождества: $x \wedge^\square y = \sim(\sim x \vee^\diamond \sim y)$; $x \wedge^\diamond y = \sim(\sim x \vee^\square \sim y)$; $x \vee^\square y = \sim(\sim x \wedge^\diamond \sim y)$; $x \vee^\diamond y = \sim(\sim x \wedge^\square \sim y)$; $\neg^\square x = \sim \neg^\diamond \sim x$; $\neg^\diamond x = \sim \neg^\square \sim x$. Дуалом к $\supset^\diamond$, согласно нашей процедуре, окажется $x \subset^\square y =: \sim(\sim x \supset^\diamond \sim y)$. Но в то же время имеет место $x \supset^\square y = \neg^\square(\neg^\square x \subset^\square \neg^\square y)$; $x \subset^\square y = \neg^\square(\neg^\square x \supset^\square \neg^\square y)$.

Описанная матрица совпадает с фрагментом $B_3^\square$ трехзначной матрицы Бочвара, однако отличается от него классом выделенных значений. Заметим, что матрица трехзначной логики Сегерберга S_3 имеет тот же набор операций, что у Бочвара, но два выделенных значения. Поэтому матрицу $S_3^\square = \langle \{0, 1, 2\}, \wedge^\square, \vee^\square, \supset^\square, \neg^\square, \{1, 2\} \rangle$ можем трактовать как фрагмент матрицы Сегерберга.

Заключительный пример из литературы представляет наибольший интерес, т. к. в нем «недооценка» истинностных значений проявляется в наиболее явном виде. Д.В. Зайцев и Е.А. Кубышкина [36] строят четырехзначную логику, в которой истинностные значения имеют составную природу. Элементы множества $\{F, T\}$ интерпретируются как «онтологически ложно» и «онтологически истинно», а элементы множества $\{0, 1\}$ как «не известно» и «известно». Множеством-носителем матрицы, которую строят авторы, оказывается произведение этих двух множеств: $\{F0, F1, T0, T1\}$. Адаптируя обозначения к терминологии текущей работы, будем далее писать $\{0, 1, 2, 3\}$. Тогда интересующая нас матрица приобретает вид $LRA = \langle \{0, 1, 2, 3\}, \wedge, \vee, \neg, \sim, \{3\} \rangle$. Таблицы для базовых операций таковы:

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	0	1	2	2
3	0	1	2	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

	$\neg x$
0	2
1	3
2	0
3	1

	$\sim x$
0	1
1	0
2	3
3	2

Как отмечают Кубышкина и Зайцев, «если мы определяем отношение следования классическим образом (истинные посылки должны влечь истинные заключения), мы получаем классическую логику, где различие между известными и не известными истинами отсутствует» (пер. автора). То есть речь идет о том, что если мы полагаем $D = \{2, 3\}$, то LRA есть матрица классической логики. Многозначность возникает, когда происходит «недооценка» предложений, которые описывают положение дел, имеющее место в действительности, но не известное познающему субъекту, и их отказываются трактовать как истинные по эпистемическим соображениям. Чтобы нагляднее проиллюстрировать, связь LRA с классической логикой, покажем, что она функционально эквивалентна матрице $LRA^* = \langle\{0, 1, 2, 3\}, \wedge, \vee, \supset, -, \{3\}\rangle$, в которой базовые операции отвечают условиям стадартности Россера–Тюркетта при $D = \{2, 3\}$. Импликация и отрицание отвечают таблицам ниже:

$\supset$	0	1	2	3
0	2	2	2	2
1	3	3	3	2
2	0	0	3	2
3	1	0	3	2

	$-x$
0	3
1	2
2	1
3	0

Покажем функциональную эквивалентность LRA и LRA^* следующими тождествами: $-x =\sim \neg x$; $x \supset y = \neg(x \wedge -y)$; $\neg x = x \supset (x \wedge -x)$; $\sim x = -\neg x$.

Приведенные выше примеры служат мотивом для более систематического изучения матриц классической логики с «переоценкой» и «недооценкой» истинностных значений. В дальнейшем будем называть их TL-матрицами, от английского «true lies». В следующем разделе я начну с рассмотрения двух классов трехзначных TL-матриц: класса TL_1 матриц с одним выделенным значением и TL_2 с двумя, —

а позже сделаю ряд обобщений для большего числа истинностных значений.

2. Классы матриц TL_1 и TL_2

Построим класс TL_1 трехзначных матриц, в которых базовые операции отвечают условиям стандартности Россера–Тюркетта при $D = \{1, 2\}$, однако класс выделенных значений ограничен одним элементом. Он состоит из матриц, имеющих вид $M = \langle\{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \dot{\neg}, \{2\}\rangle$, в которых операции отвечают следующим таблицам:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1 или 2	1 или 2
2	0	1 или 2	1 или 2

$\vee$	0	1	2
0	0	1 или 2	1 или 2
1	1 или 2	1 или 2	1 или 2
2	1 или 2	1 или 2	1 или 2

$\rightarrow$	0	1	2
0	1 или 2	1 или 2	1 или 2
1	0	1 или 2	1 или 2
2	0	1 или 2	1 или 2

	$\dot{\neg}x$
0	1 или 2
1	0
2	0

Класс TL_2 получаем с помощью процедуры дуализации, описанной в Части I. В матрицах этого класса операции отвечают условиям стандартности при одном выделенном значении, однако $D = \{1, 2\}$. Элементы TL_2 имеют вид $M = \langle\{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \leftarrow, \ddot{\neg}, \{1, 2\}\rangle$, а их операции отвечают следующим таблицам:

$\wedge$	0	1	2
0	0 или 1	0 или 1	0 или 1
1	0 или 1	0 или 1	0 или 1
2	0 или 1	0 или 1	2

$\vee$	0	1	2
0	0 или 1	0 или 1	2
1	0 или 1	0 или 1	2
2	2	2	2

$\leftarrow$	0	1	2
0	0 или 1	0 или 1	2
1	0 или 1	0 или 1	2
2	0 или 1	0 или 1	0 или 1

	$\ddot{\neg}x$
0	2
1	2
2	0 или 1

Обычно, когда классы матриц задаются через условия, накладываемые на свойства базовых операций, требуют, чтобы эти операции были, помимо прочего, C-расширяющими (см., например, [17, § 5.3], [12], [26], [55], [8]). Однако я воздерживаюсь от этого требования в пользу более обобщенного подхода. Обратим внимание, что рассмотренная выше матрица LRA не является C-расширяющей. В то же время необходимо отметить, что отказ от обсуждаемого ограничения ведет к определенным затруднениям. В классе TL_1 появляется «вырожденная» матрица, в которой каждая неэлементарная формула принимает только значения из $\{0, 1\}$ — множества невыделенных значений. Аналогично, в TL_2 имеется элемент, область значений элементарных операций которого ограничена $\{1, 2\}$, т. е. выделенными значениями. Обозначим эти матрицы как $B_3^\star$ и $S_3^\star$ соответственно. Ниже привожу по две операции для каждой матрицы, остальные определяются через них так же, как в классической логике.

$\to_B$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	1
2	0	1	1

	$\neg_B x$
0	1
1	0
2	0

$\leftarrow_S$	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	2
2	1	1	1

	$\neg_S x$
0	2
1	2
2	1

Едва ли можно считать $\neg_B x$ и $\neg_S x$ полноценными отрицаниями. По своим свойствам эти операторы ближе к $\perp$ и $\top$ (см. [30, § 1.3.], а также [17, p. 11–12]). При этом в классах TL_1 и TL_2 значительное количество матриц не содержит более удачных кандидатов на роль отрицания. Однако, по мнению автора, существует и достаточно веский аргумент, оправдывающий включение соответствующих матриц в изучаемый класс. Чтобы изложить его, потребуется ввести дополнительные понятия.

До этого мы пользовались определением следования в терминах логических матриц. Теперь расширим это понятие. *Отношением следования по Тарскому* для пропозиционального языка $\mathcal{L}$ называем бинарное отношение $\vdash$ между $X \subseteq For(\mathcal{L})$ и $\alpha \in For(\mathcal{L})$, отвечающее трем условиям:

- Если $\alpha \in X$, то $X \vdash \alpha$ (рефлексивность);

- Если $X \vdash \alpha$ и $X \subseteq X'$, то $X' \vdash \alpha$ (монотонность);
- Если $X \vdash \alpha$ и $X' \vdash \alpha$, то $X, X' \vdash \alpha$ (транзитивность).

Называем $\vdash$ *структурным*, если для каждого эндоморфизма θ в $\mathcal{L}$, каждого множества формул X и каждой формулы α имеет место: если $X \vdash \alpha$, то $\theta(X) \vdash \theta(\alpha)$. Называем $\vdash$ *нетривиальным*, если найдутся непустое множество формул X и формула α, такие что $X \nvdash \alpha$. Называем $\vdash$ *финитарным*, если для каждого множества формул X и каждой формулы α, таких что $X \vdash \alpha$, найдется конечное множество X', для которого выполняется: $X' \subseteq X$ и $X' \vdash \alpha$. Если $\vdash$ структурное, нетривиальное и финитарное следование по Тарскому для пропозиционального языка $\mathcal{L}$, пара $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ назовем *пропозициональной логикой*.

Имеет место следующий факт. Пусть $X \vdash \alpha$, е.т.е. $\langle X, \alpha \rangle \in Cn(M)$ для некоторой конечнозначной матрицы M, в которой D есть непустое собственное подмножество множества-носителя. Тогда $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ есть пропозициональная логика. Структурность $\vdash$ вытекает из [59, § 3.1.3], финитарность — из [52], нетривиальность — из ограничения, наложенного на объем класса выделенных значений. Для экономии места опускаю обобщение этого материала для следования с множественными заключениями и адресую читателя к работам Р. Вуйцицкого [59, § 4.7], а также Д. Шусмита и Т. Смайли [53, § 2.1, § 2.2, §§ 13.1–13.3].

На основе определенного выше понятия следования, О. Ариэли и соавторы вводят понятия *пред-отрицания* и *слабого отрицания* [13]. Пусть $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ пропозициональная логика, язык $\mathcal{L}$ которой содержит унарную связку $\neg$

- Говорим, что $\neg$ есть *пред-отрицание*, если $p \nvdash \neg p$ для $p \in Var(\mathcal{L})$.
- Пред-отрицание является *слабым отрицанием*, если $\neg p \nvdash p$ для $p \in Var(\mathcal{L})$.

Если $X \vdash \alpha \iff \langle X, \alpha \rangle \in Cn(M)$ для некоторой матрицы $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, первое условие означает, что $\neg x \notin D$ для некоторого $x \in D$, а второе — что $\neg y \in D$ для некоторого $y \notin D$. То есть базовым свойством отрицания, если следовать условиям выше, оказывается то, что операция не сохраняет выделенное значение. А дуальное свойство — не сохранять невыделенное значение – «надстраивается» над ним. Это отражает взгляд на истинностные значения, при котором «истина» оказывается главным значением, а «ложь» играет вторичную, подчиненную роль. Подобный взгляд отражен в обычном определении матричного следования — от посылок к заключению сохраняется именно значение «истина». Однако возможен и подход, при котором «истина» и «ложь» трактуются как равноправные значения. В частности, для этого можно использовать следование с множественными заключениями. Сохраняются не только выделенные значения при переходе от посылок к заключениям, но и невыделенные при переходе в обратную сторону. Тогда условия $\langle\{p\}, \{\neg p\}\rangle \notin Cn_M(M)$ (не сохраняется «истина» слева направо) и $\langle\{\neg p\}, \{p\}\rangle \notin Cn_M(M)$ (не сохраняется «ложь» справа налево) оказываются симметричными[3]. С этой точки зрения представляется обоснованным переформулировать условия Ариэли следующим образом:

- Говорим, что $\neg$ есть пред-отрицание, если $p \nvdash \neg p$ или $\neg p \nvdash p$ для $p \in Var(\mathcal{L})$.

- Пред-отрицание является слабым отрицанием, если одновременно $p \nvdash \neg p$ и $\neg p \nvdash p$ для $p \in Var(\mathcal{L})$.

Это приводит нас к тому, что каждая матрица из классов TL_1 и TL_2 есть матрица пропозициональной логики с пред-отрицанием. На этом основании можно заключить, что все логики, задаваемые рассматриваемыми матрицами, обладают достаточным количеством полезных логический свойств, чтобы оправдать их дальнейшее изучение.

[3]Здесь можно провести параллель с понятиями «негативного объекта справа» и «негативного объекта слева», которые рассматривает Л. Хамберстоун [30, p. 14].

В Части I данной работы большое внимание уделено роли модификаций матриц классической логики в рамках исследований по паранепротиворечивым логикам. Имеет смысл вернуться к этой теме, рассматривая TL-матрицы. Тем более, что все известные автору по литературе TL-матрицы получены «недооценкой» истинностных значений, а для паранепротиворечивости необходима их «переоценка». Напомню, что в данной работе паранепротиворечивость толкуется в терминах следования: называем пропозициональную логику $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *паранепротиворечивой* (относительно $\neg$), если найдутся такие $\alpha, \beta \in For(\mathcal{L})$, что $\{\alpha, \neg\alpha\} \nvdash \beta$. Из определения $\ddot{\neg} x$ (с. 20) очевидным образом вытекает, что матрицы из TL_2 задают паранепротиворечивые логики.

Однако существует другой подход к определению критериев паранепротиворечивости. Логика считается паранепротиворечивой, если в ней не сохраняются отдельные законы классической логики, например, закон Дунса Скота: $\alpha \supset (\neg\alpha \supset \beta)$. В общем случае условия $\{\alpha, \neg\alpha\} \nvdash \beta$ и $\nvdash \alpha \supset (\neg\alpha \supset \beta)$ не эквивалентны. В логике парадоксов Приста имеет место первое, но не второе. В логике Клини [35] — второе, но не первое. С этой точки зрения матрицы из TL_2 походят на матрицу Приста LP.

Утверждение 1. Если $M \in TL_2$, то $T(C_2) \subseteq T(M)$. Если матрица M, к тому же, является C-расширяющей, то $T(C_2) = T(M)$.

Доказательство. Докажем первую часть. Функционально эквивалентным образом переопределим матрицу C_2, заменив $\supset$ на $\subset$ в множестве ее базовых операций. Пусть $\alpha \notin T(M)$. Тогда найдется оценка h в M, такая что $h(\alpha) = 0$. Определим отображение φ из алгебры M в алгебру C_2: $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi(2) = \varphi(1)$. Из определений TL_2, $\leftarrow$ и C_2, вытекает, что φ есть гомоморфизм. Поэтому, если $h(\alpha) = 0$, то $h'(p_i) = \varphi(h(p_i))$ есть оценка в C_2 и $h'(\alpha) = 0$. Таким образом, $\alpha \in T(M)$ и $T(C_2) \subseteq T(M)$. Докажем вторую часть. Из того, что M является C-расширяющей, напрямую следует $T(M) \subseteq T(C_2)$. Вместе с первой частью настоящего утверждения это дает $T(C_2) = T(M)$. $\square$

В исследованиях по паранепротиворечивым логикам важную роль играет понятие максимальности относительно классической логики, восходящее к работам А.М. Сетте [50] и Н. да Коста [21]. Паранепротиворечивую логику $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathbf{L}} \rangle$ называют *максимальной относительно классической логики* $\mathbf{CL} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathbf{CL}} \rangle$, если она отвечает двум условиям:

- Каждая теорема $\mathbf{L}$ есть теорема $\mathbf{CL}$.

- Если α теорема $\mathbf{CL}$, но не теорема $\mathbf{L}$, добавление α к $\mathbf{L}$ в качестве аксиомы, превращает $\mathbf{L}$ в $\mathbf{CL}$.

Большая часть известных в литературе многозначных паранепротиворечивых логик обладает этим свойством. В частности, таковы все логики, задаваемые матрицами из класса $8Kb$ [17, p. 78]. Подробному рассмотрению вопроса о максимальности посвящена работа [40]. В свете доказанного выше утверждения о матрицах из TL_2 для их анализа понятие максимальности относительно классической логики оказывается неподходящим. В его основе лежит понимание логической системы как класса тавтологий. Но с этой точки зрения ни одна из систем, задаваемых матрицами из TL_2, просто не является паранепротиворечивой, ведь в каждой из них имеют место и закон Дунса Скота, и закон противоречия $(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha))$, отсутствия которого в паранепротиворечивой системе прямо требовал да Коста. Однако мы можем получить содержательные результаты, если обратимся к более обобщенной трактовке максимальности паранепротиворечивых логик. Введем следующие определения [13]:

- Говорим, что логика $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *максимально паранепротиворечива в слабом смысле*, если каждая логика $\mathbf{L}' = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$, где $\vdash \subseteq \Vdash$ и множество теорем $\mathbf{L}$ является собственным подмножеством множества теорем $\mathbf{L}'$, не является паранепротиворечивой.

- Говорим, что логика $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *максимально паранепротиворечива в сильном смысле*, если каждая логика $\mathbf{L}' = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$, где $\vdash \subset \Vdash$, не является паранепротиворечивой.

В работе [14] доказано, что каждая матрица из $8Kb$ является максимально паранепротиворечивой в сильном смысле. Ниже я покажу, что это так и для TL_2.

Утверждение 2. Если $M \in TL_2$, то логика, которую она задает, является максимально паранепротиворечивой в сильном смысле.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение, покажем, что имеют место следующие факты: (i) $S_3^\Box$ и все ее функциональные расширения задают логику, максимально паранепротиворечивую в сильном смысле. (ii) $S_3^\star$ и все ее функциональные расширения задают логику, максимально паранепротиворечивую в сильном смысле. (iii) Каждая матрица из TL_2 является функциональным расширением $S_3^\Box$ или $S_3^\star$.

Истинность (i) следует из результатов [14, Th. 3.2]. Переходим к доказательству (ii).

Пусть матрица M для языка $\mathcal{L}$ является функциональным расширением $S_3^\star$. Пусть существует такая логика $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, что $Cn(M) \subset \vdash$. Тогда найдутся X и α, такие что $X \vdash \alpha$ и $\langle X, \alpha \rangle \notin Cn(M)$. В этом случае найдется оценка h_0 в M, при которой $h_0(X) \subseteq \{1, 2\}$ и $h_0(\alpha) = 0$. Определим подстановку e следующим образом:

$$e(p) = \begin{cases} (p \leftarrow p), \text{ если } h_0(p) = 1, \\ \neg(p \leftarrow p), \text{ если } h_0(p) = 2, \\ p_0, \text{ если } h_0(p) = 0. \end{cases}$$

В силу структурности $\vdash$ получаем, что $e(X) \vdash e(\alpha)$. В силу определения $e(p)$, если $h(p_0) = 0$, то $h(e(X)) \subseteq \{1, 2\}$ и $h(e(\alpha)) = 0$. Отсюда имеем: $\langle \alpha, p_0 \rangle \in Cn(M)$. Поскольку $Cn(M) \subset \vdash$, также выполняется $\alpha \vdash p_0$

Для каждой формулы β из $e(X)$ имеет место либо случай (1): если $h(p_0) \in \{1, 2\}$, то $h(\beta) \in \{1, 2\}$, — либо случай (2): $h(\beta) = 0$ при $h(p_0) = 1$ или $h(p_0) = 2$.

Рассмотрим случай (1). Если $\beta \in e(X)$, то $h(\beta) \in \{1, 2\}$ при любом h. Следовательно, $\langle \{q_0, \neg q_0\}, \beta \rangle \in Cn(M)$. Поскольку $Cn(M) \subset \vdash$, также выполняется $q_0, \neg q_0 \vdash \beta$. В силу транзитивности и монотонности $\vdash$, $q_0, \neg q_0 \vdash \alpha$. Но так как $\alpha \vdash p_0$, из этого вытекает $q_0, \neg q_0 \vdash p_0$. Поэтому $\vdash$ не является паранепротиворечивым.

Рассмотрим случай (2). Если $h(\beta) = 0$ при $h(p_0) = 1$, то $h\beta((p \leftarrow p)/p_0) = 0$ для любой оценки h. Если $h(\beta) = 0$ при $h(p_0) = 2$, то $h\beta(\neg(p \leftarrow p)/p_0) = 0$ для любой оценки h. Обозначим через $\perp$ формулу, которая принимает значение 0 при любой оценке h. Определим подстановку e' следующим образом:

$$e'(p) = \begin{cases} (p \leftarrow p), \text{ если } h_0(p) = 1, \\ \neg(p \leftarrow p), \text{ если } h_0(p) = 2, \\ \perp, \text{ если } h_0(p) = 0. \end{cases}$$

При любой оценке h в M каждая $\beta \in X$ принимает выделенное значение и $h(\alpha) = 0$. Так как $\langle\{q_0, \neg q_0\}, \beta\rangle \in Cn(M)$, $\langle \alpha, p_0 \rangle \in Cn(M)$ и $Cn(M) \subset\vdash$, выполняется $q_0, \neg q_0 \vdash \beta$ и $\alpha \vdash p_0$. В силу транзитивности и монотонности $\vdash$ имеем: $q_0, \neg q_0 \vdash p_0$. Поэтому $\vdash$ не является паранепротиворечивым.

Теперь докажем (iii). Пусть $M = \langle \{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \leftarrow, \ddot{\neg}, \{1, 2\}\rangle$ матрица из TL_2. Определим операции в матрице $M' = \langle \{0, 1, 2\}, \wedge', \vee', \leftarrow', \ddot{\neg}, \{1, 2\}\rangle$ следующими тождествами: $x \wedge' y = \ddot{\neg}\ddot{\neg}(x \wedge y)$, $x \vee' y = \ddot{\neg}\ddot{\neg}(x \vee y)$, $x \leftarrow' y = \ddot{\neg}\ddot{\neg}(x \leftarrow y)$. По определению TL_2, M' есть $S_3^{\square}$, если $\ddot{\neg}x$ есть $\neg^{\square}x$, и M' есть $S_3^{\star}$, если $\ddot{\neg}x$ есть $\neg_S x$. Доказательство закончено. $\square$

Можно распространить результаты, сформулированные в утверждениях 1 и 2 на матрицы из класса TL_1, если трактовать задаваемые ими логики как параполные. Однако, как и в случае паранепротиворечивости, существуют разные формулировки критериев параполноты. В работе [37] параполная логика характеризуется так: «логическая система параполна, если она может служить логикой, лежащей в основе теорий, в которых имеются (замкнутые) формулы, такие что эти формулы и их отрицания одновременно ложны. <...> Кроме того, параполные теории не отвечают принципу исключенного третьего, сформулированному в следующей форме: из двух противоречащих пропозиций одна должна быть истинна» (пер. автора). С формальной точки зрения это соображение может трактоваться как запрет на сохранение отдельных законов классической логики, например, $\alpha \vee \neg\alpha$ [51], или $(\alpha \supset \neg\alpha) \supset \neg\alpha$ [15], или $(\neg\alpha \supset \alpha) \supset \alpha$ [19], [6, §2.1]. Возможно также сформулировать это условие в терминах следования, тогда логику **L** называют параполной, если для некоторых $X \subseteq For(\mathcal{L})$ и $\alpha, \beta \in For(\mathcal{L})$ верно, что $X, \alpha \vdash_{\mathbf{L}} \beta$, $X, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{L}} \beta$ и $X \nvdash_{\mathbf{L}} \beta$. Однако нас будет интересовать в первую очередь дуальность между классами TL_1 и TL_2. С этой точки зрения в качестве критерия лучше всего подходит следующий принцип: называем логику $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *параполной*, е.т.е. $\beta \nvdash \{\alpha, \neg\alpha\}$ для некоторых $\alpha, \beta \in For(\mathcal{L})$[4]. Ясно, что такая формулировка имеет смысл, только если расширить определение логики, чтобы следование допускало множественные заключения. Это может быть как уже рассмотренное следование типа $X \vdash Y$ $(X, Y \subseteq For(\mathcal{L}))$, так и следование с сингулярными посылками и множественными заключениями, которое, в матричной форме, определяется следующим образом[5]:

$$Cn^*(M) = \{\langle \alpha, X\rangle | \forall h(h(X) \cap D = \emptyset \Longrightarrow h(\alpha) \notin D)\}.$$

Кроме того, следуя [16], введем понятие класса *контр-тавтологий*:

$$T^*(M) = \{\alpha | \forall h(h(\alpha) \notin D)\}.$$

Это позволяет получить дуальный вариант утверждения 1.

Утверждение 3. Если $M \in TL_1$, то $T^*(C_2) \subseteq T^*(M)$. Если матрица M, к тому же, является C-расширяющей, то $T^*(C_2) = T^*(M)$.

Обратим внимание, что свойство $T^*(C_2) = T^*(M)$ есть матричный вариант свойства $\alpha \vdash_{\mathbf{L}} \bot \Longleftrightarrow \alpha \vdash_{\mathbf{CL}} \bot$, которое имеет место в интуиционистской логике **Int** и выступает следствием из известной теоремы Гливенко [57], [56]. Само же утверждение теоремы встречается в литературе в двух вариантах: $\vdash_{\mathbf{Int}} \neg\neg\alpha \Longleftrightarrow \vdash_{\mathbf{CL}} \alpha$ [45, p. 391] и $\vdash_{\mathbf{Int}} \neg\alpha \Longleftrightarrow \vdash_{\mathbf{CL}} \neg\alpha$ [29], [56]. Покажем, что при обоих формулировках аналог теоремы доказуем для C-расширяющих матриц из TL_1.

[4]Подробный анализ этого вопроса см. в [39] и [31].

[5]О соотношении между Cn, Cn^* и Cn_M см. [20].

Утверждение 4. Пусть $M \in TL_1$ и матрица M является C-расширяющей. Тогда верно следующее: (1) $\neg\neg\alpha \in T(M) \Longleftrightarrow \alpha \in T(C_2)$; (2) $\neg\alpha \in T(M) \Longleftrightarrow \neg\alpha \in T(C_2)$.

Доказательство. Построим матрицу M', заменив в M класс выделенных значений на $D' = \{1, 2\}$. По построению TL_1, базовые операции M' отвечают условию стандартности Россера–Тюркетта. Следовательно, $Cn_M(M') = Cn_M(C_2)$. Отсюда $T^*(M') = T^*(C_2)$. В то же время $T^*(M') = \{\alpha | \forall h(h(\alpha) = 0)\}$. Так как, в силу утверждения 3, $T^*(M) = T^*(C_2)$, и каждая оценка в M' есть оценка в M, также верно, что $T^*(M) = \{\alpha | \forall h(h(\alpha) = 0)\}$. Кроме того, если M есть C-расширяющая матрица из TL_1, ее отрицанием является $\neg^\diamond$.

Докажем (1, $\Longrightarrow$). Пусть $\neg\neg\alpha \in T(M)$. Тогда $h(\neg\neg\alpha) = 2$ для каждой оценки h в M. По определению оценки, $\neg^\diamond(h(\neg\alpha) = 2)$ По определению $\neg^\diamond$, $h(\neg\alpha) = 0$, то есть $\neg\alpha \in T^*(M)$. В силу утверждения 3, $\neg\alpha \in T^*(C_2)$. Так как C_2 есть матрица классической логики, $\alpha \in T(C_2)$.

Теперь докажем (1, $\Longleftarrow$). Пусть $\beta \in T(C_2)$. Так как C_2 есть матрица классической логики, $\neg\beta \in T^*(C_2)$. В силу утверждения 3, $\neg\beta \in T^*(C_2)$. Так как $T^*(M) = \{\alpha | \forall h(h(\alpha) = 0)\}$, верно, что $h(\neg\beta) = 0$ для каждой оценки h в M. Тогда, по определению $\neg^\diamond$, $\neg^\diamond(h(\neg\alpha) = 2)$. По определению оценки, $(h(\neg\neg\alpha) = 2)$. Следовательно, $\neg\neg\alpha \in T(M)$.

Наконец, докажем (2). В силу определения $\neg^\diamond$, верно, что $\neg^\diamond x = \neg^\diamond\neg^\diamond\neg^\diamond x$. Следовательно, $\neg\alpha \in T(M) \Longleftrightarrow \neg\neg\neg\alpha \in T(M)$. Из этого наблюдения и (1) очевидным образом следует, что $\neg\alpha \in T(M) \Longleftrightarrow \neg\alpha \in T(C_2)$. □

Поскольку классы TL_1 и TL_2 дуальны, также получаем следующее.

Утверждение 5. Пусть $M \in TL_2$ и матрица M является C-расширяющей. Тогда верно следующее: (1) $\neg\neg\alpha \in T^*(M) \Longleftrightarrow \alpha \in T^*(C_2)$; (2) $\neg\alpha \in T^*(M) \Longleftrightarrow \neg\alpha \in T^*(C_2)$.

Стоит отметить, что при дуализации **Int** в качестве дуального варианта теоремы Гливенко зачастую рассматривается аналог утверждения 1: $\vdash_{\mathbf{L}} \alpha \Longleftrightarrow \vdash_{\mathbf{CL}} \alpha$ [16], [56], [57]. Однако в нашем случае это было бы не вполне корректно. Хотя для C-расширяющих матриц из TL_1 выполняются как только что указанное условие, так и дуальные формулировки теоремы в утверждении 5, в более общем случае это может быть не иметь места. Например, в матрице Приста LP истинно утверждение 1, однако ложны обе части утверждения 5, поскольку $T^*(LP) = \emptyset$.

Теперь формулируем дуальный вариант утверждения 2. Для этого потребуется следующее определение: будем называть логику $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *максимально параполной в сильном смысле*, если каждая логика $\mathbf{L'} = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$, где $\vdash \subset \Vdash$, не является параполной.

Утверждение 6. Если $M \in TL_1$, то логика, которую она задает, является максимально параполной в сильном смысле.

До настоящего момента мы рассматривали общие свойства матриц, входящих в классы TL_1 и TL_2 или их C-расширяющие подклассы. Теперь проанализируем внутреннюю структуру этих классов. Для этого обратимся к подходу, который применяется в [55], [10] и [34], и упорядочим изучаемые классы по отношению функциональной вложимости.

Для формулировки результатов необходимо определить матрицу $TL_1^{\top} = \langle \{0, 1, 2\}, \wedge, \vee, \to_{\top}, \neg, \{2\} \rangle$. Ее базовые операции совпадают с таковыми в G_3, за исключением $\to_{\top}$, которая отвечает следующей таблице:

$\to_{\top}$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	2	1

Утверждение 7. Пусть $M \in TL_1$. Тогда $TL_1^{\top}$ есть функциональное расширение M. Если матрица M, к тому же, C-расширяющая, то G_3 есть функциональное расширение M.

Доказательство. По построению TL_1, каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определимая в M, отвечает следующему условию:

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 2, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0.$$

То есть $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет разбиение $\pi = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. С.В. Яблонский доказал [11], что класс U всех функций, сохраняющих данное разбиение, предполон в P_3, классе всех функций на $\{0, 1, 2\}$. Таким образом, класс операций M с необходимостью включается в U.

Как показал М.Ф. Раца [7], класс операций G_3 представляет собой пересечение класса U с классом T всех C-расширяющих функций на $\{0, 1, 2\}$. Таким образом, любой подкласс U, содержащий только C-расширяющие функции, включается в класс операций G_3. Это доказывает вторую часть утверждения.

Кроме того, в процитированной работе Раца показано, что класс операций G_3 предполон в U. Отсюда, поскольку операция $\to_\top$ принадлежит классу U, но не принадлежит классу T, вытекает, что базовые операции $TL_1^\top$ образуют базис класса U. Это доказывает первую часть утверждения. □

Из доказательства пункта (iii) утверждения 2, а также дуальности классов TL_1 и TL_2 также вытекает следующее.

Утверждение 8. Пусть $M \in TL_1$. Тогда M есть функциональное расширение $B_3^\diamond$ или $B_3^\star$. Если матрица M, к тому же, C-расширяющая, то M не является функциональным расширением $B_3^\star$.

Утверждения 7 и 8 позволяют заключить, что матрицы класса TL_1 образуют решетку по отношению функциональной вложимости, в которой супремумом выступает класс матриц, функционально эквивалентных $TL_1^\top$, а инфинумом — пустое множество. Подкласс C-расширяющих матриц представляет собой подрешетку данной решетки, где супермумом выступает класс матриц, функционально эквивалентных G_3, а инфинумом класс, состоящий из матрицы $B_3^\diamond$.

Так как классы TL_1 и TL_2 дуальны, матрицы из TL_2 образуют решетку, изоморфную решетке матриц из TL_1. Для нее выполняются следующие утверждения.

Утверждение 9. Пусть $M \in TL_2$. Тогда матрица $TL_2^\top$, дуальная $TL_1^\top$, есть функциональное расширение M. Если матрица M, к тому же, C-расширяющая, то G_3^* есть функциональное расширение M.

Утверждение 10. Пусть $M \in TL_2$. Тогда M есть функциональное расширение $S_3^\square$ или $S_3^\star$. Если матрица M, к тому же, C-расширяющая, то M не является функциональным расширением $S_3^\star$.

Матрицы $B_3^\diamond$ и $S_3^\square$, которые являются наиболее слабыми с функциональной точки зрения в своих классах, обладают рядом интересных свойств, на которых стоит остановиться отдельно.

Как и P^1 и I^1, $B_3^\diamond$ и $S_3^\square$ задают литеральные паралогики. Р. Левин и И. Микенберг рассмотрели семейство из четырех трехзначных матриц, задающих такие паралогики, которое включает в себя P^1, I^1, P^2, I^2 [38]. Если мы требуем от операций $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ стандартности, то P^1, I^1 будут функционально слабейшими С-расширяющими матрицами литеральных паралогик. Но в более общем случае такими матрицами окажутся $S_3^\square$ и $B_3^\diamond$. Между операциями C_2 и $S_3^\square$ существует взаимно-однозначное соответствие. Поскольку в C-расширяющей матрице M каждой операции C_2 соответствует по меньшей мере одна операция M, в $S_3^\square$ не определима никакая C-расширяющая матрица M, не являющаяся функционально эквивалентной $S_3^\square$. Теперь покажем, что $S_3^\square$ есть матрица литеральной паранепротиворечивой логики. В то время как $\langle\{p_1, \neg p_1\}, q\rangle \notin Cn(S_3^\square)$, можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 11. Если ни одна из формул, принадлежащих $X \cup Y$, не является пропозициональной переменной, то

$$\langle X, Y\rangle \in Cn_M(S_3^\square) \Longleftrightarrow \langle X, Y\rangle \in Cn_M(C_2).$$

Доказательство. Заменив в $S_3^\square$ класс выделенных значений $D_S = \{1, 2\}$ на $D_B = \{2\}$, получаем матрицу $B_3^\square$. Имеет место следующее: h есть оценка формулы β в $B_3^\square$, е.т.е. h есть оценка формулы β в $S_3^\square$. Пусть β' не является пропозициональной переменной. Тогда для каждой оценки h в $S_3^\square$ и $B_3^\square$ верно, что $h(\beta') \in \{0, 2\}$.

Как следствие, $h(\beta') \in D_S \iff h(\beta') \in D_B$. То есть если ни одна из формул, принадлежащих $X \cup Y$ не является пропозициональной переменной, то $\langle X, Y\rangle \in Cn_M(S_3^\Box) \iff \langle X, Y\rangle \in Cn_M(B_3^\Box)$. В то же время $Cn_M(B_3^\Box) = Cn_M(C_2)$. $\Box$

Итак, $S_3^\Box$ является наиболее слабой с функциональной точки зрения C-расширяющей матрицей литеральной паранепротиворечивой логики. В силу дуальности, $B_3^\diamond$ является слабейшей C-расширяющей матрицей литеральной параполной логики.

Теперь вспомним, что матрицы P^1 и I^1 можно задать следующим образом: $P^1 = \langle\{0,1,2\}, \supset^\diamond, \neg^\Box, \{1,2\}\rangle$; $I^1 = \langle\{0,1,2\}, \supset^\Box, \neg^\diamond, \{2\}\rangle$, где $(x \supset^\Box y = \neg^\diamond(\neg^\diamond x \subset^\Box \neg^\diamond y))$. При этом P^1 и I^1 функционально эквивалентны. То есть, как обратил внимание А.С. Карпенко [33], P^1 получается добавлением к $S_3^\Box$ операций из $B_3^\diamond$, а I^1 — из $B_3^\diamond$ при добавлении операций из $S_3^\Box$. На этом основании им предложен метод построения литеральных паралогик с помощью «комбинирования изоморфов классической логики», где изоморфом называется многозначная матрица, порождающая классический класс тавтологий. Дальнейшей разработке этого метода посвящена часть совместной работы Карпенко и Томовой [6, § 3.1.1].

Анализ TL-матриц, предложенный в настоящей работе, позволяет внести уточнения в процедуру «комбинирования изоморфов». В случае P^1, где $D = \{1,2\}$, происходит объединение порождающей классическое отношения следования матрицы $S_3^\diamond$, которая функционально эквивалентна $B_3^\diamond$, однако имеет два выделенных значения вместо одного, с паранепротиворечивой TL-матрицей $S_3^\Box$. В случае I^1, где $D = \{2\}$, объединяются трехзначная матрица классической логики $B_3^\Box$, отличная от $S_3^\Box$ лишь тем, что ее класс выделенных значений содержит единственное значение вместо двух, с параполной TL-матрицей $B_3^\diamond$. Паранепротиворечивость и параполнота матриц, полученных «комбинированием изоморфов», является следствием того, что они являются функциональными расширениями соответствующих TL-матриц.

Заметим, что функциональными расширениями TL-матриц оказываются также все матрицы из рассмотренных в Части I семейств

$8Kb$ и $8Kb^*$. Это вытекает из того, что каждая матрица из $8Kb$ есть функциональное расширение P^1, а каждая матрица из $8Kb^*$ есть функциональное расширение I^1. Данный факт говорит о том, что TL-матрицы могут играть полезную роль в построении функциональных классификаций многозначных логик. Одна такая классификация уже существует в литературе. Это решетка так называемых «естественных p-логик», построенная Н. Томовой [9], в которой инфинумом выступает матрица P^1, и все элементы, таким образом, суть функциональные расширения TL-матрицы $S_3^{\Box}$. Другая решетка логик, принадлежащая тому же автору (см. [10], [55], [3, Гл. 3]), имеет своим инфинумом операции слабой логики Клини, или, что то же самое, внутренние операции логики Бочвара. Матрица с такими операциями и $D = \{1, 2\}$ задает класс тавтологий, совпадающий с классическим. При $D = \{2\}$ такая матрица порождает классический класс контр-тавтологий. То есть, хотя эти матрицы и не входят в TL_1 или TL_2, они делят существенные свойства с элементами этих классов.

В заключение раздела обратимся к теме, объединяющей Часть I и Часть II этой работы. Хотя ни одна из TL-матриц не входит в классы $8Kb$ или $8Kb^*$, некоторые из них также могут быть представлены как расширения матрицы классической логики. Это становится возможно благодаря тому, что мы включили в TL_1 и TL_2 матрицы, которые не являются C-расширяющими. Как следует из доказательства утверждения 7, в матрице $TL_1^{\top}$ выразимы все функции из класса U. Множеству этих функций, в частности, принадлежат задаваемые следующими таблицами:

$\check{\wedge}$	0	1	2
0	1	1	1
1	1	1	1
2	1	1	2

$\check{\vee}$	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\check{\supset}$	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	1	1	2

	$\check{\neg} x$
0	2
1	2
2	1

Нетрудно убедиться, что эти операции отвечают условиям стандартности Россера–Тюркетта. Таким образом, $TL_1^{\top}$ есть функциональное расширение трехзначной матрицы классической логики. Заметим, что в $TL_1^{\top}$ выразима также следующая операция: $\check{\sim} 0 = 2;$

$\check{\sim}1 = \check{\sim}2 = 1$. В то же время матрица $M = \langle\{0,1,2\}, \check{\wedge}, \check{\vee}, \check{\to}, \check{\sim}, \{2\}\rangle$ изоморфна матрице I^1.

В силу дуальности, $TL_2^\top$ является функциональным расширением трехзначной матрицы классической логики и содержит матрицу, изоморфную P^1. Последнее означает, что $TL_2^\top$ представляет собой матрицу логики формальной противоречивости (LFI), которая не входит в семейство $8Kb$.

Итак, мы рассмотрели два класса трехзначных TL-матриц для фиксированных пропозициональных языков, а также некоторые свойства логик, задаваемых ими. В заключение рассмотрим направления для обобщения этих результатов. Во-первых, я рассмотрю вопрос о матрицах с большим числом значений. Во-вторых, будут намечены пути перехода от рассмотрения матриц для фиксированного языка к матрицам, где операции трактуются в терминах замкнутых классов функций, без привязки базиса к какой-либо конкретной сигнатуре.

3. Заключение

Построение аналогов классов TL_1 и TL_2 для произвольного k значений и обобщение на них результатов, изложенных в утверждениях 1–11 не представляет заметных затруднений. Обратим лишь внимание на то, что матрица Гёделя G_3 является супремумом в решетке C-расширяющих матриц из TL_1 (утверждение 7), однако уже в четырехзначном случае G_4 таким свойством не обладает. Дело в том, что операции G_4 не только сохраняют разбиение $\pi = \{\{0\},\{1,2,3\}\}$ множества $\{0,1,2,3\}$, а также сохраняют его подмножество $\{0,3\}$, т. е. являются C-расширяющими, но и сохраняют множество $\{0,2,3\}$. Это значит, что найдется C-расширяющая матрица с операциями, сохраняющими π, которая является собственным функциональным расширением G_4. Аналогично, требует соответствующей модификации и утверждение 9.

Однако по-настоящему важным следствием увеличения числа истинностных значений будет возможность определить матрицы, которые задают логики, являющиеся *паранормальными*, т. е. параполными и паранепротиворечивыми одновременно. В качестве примера рассмотрим матрицу, которая содержит $B_3^{\diamond}$ и $S_3^{\Box}$ в качестве подматриц. Возьмем следующие таблицы:

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	3	3
3	0	0	3	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	0	0	3	3
2	3	3	3	3
3	3	3	3	3

$\to$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	3	3	3	3
2	0	0	3	3
3	0	0	3	3

$\leftarrow$	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	0	0	3	3
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

	$\neg x$
0	3
1	3
2	0
3	0

Матрица $M = \langle\{0,1,2,3\}, \wedge, \vee, \to, \leftarrow, \neg, \{1,3\}\rangle$ задает логику, в которой одновременно имеет место как $\{\alpha, \neg\alpha\} \nvdash \beta$, так и $\beta \nvdash \{\alpha, \neg\alpha\}$. По аналогии с TL_1 и TL_2, можно определить целый класс подобных матриц, который мы обозначим TL_3. На TL_3 переносится ряд полученных ранее результатов. Матрица M задает литеральную паралогику (аналог утверждения 11). Для каждой C-расширяющей матрицы из TL_3 верно, что ее классы $T(M)$ и $T(M^*)$ совпадают с классическими (аналог утверждений 1 и 3). Каждая матрица из TL_3 задает максимально паранормальную логику (аналог утверждения 2). Как и в предыдущих классах, в TL_3 имеются «вырожденные» матрицы. Аналогом $S_3^{\star}$ будет такая матрица из TL_3, что каждая из ее операций выполняет условие $f(x_1, \ldots, x_n) \in \{1,3\}$. Аналогом $B_3^{\star}$, матрицы из TL_1, где $f(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}$, и все неэлементарные формулы принимают только невыделенные значения, будет матрица, в которой $f(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,2\}$. Интересно, что матрица из TL_3, где $f(x_1, \ldots, x_n) \in \{1,2\}$, не является вырожденной. Она изоморфна матрице M, которую мы определили выше.

До настоящего момента мы рассматривали матрицы в фиксированных языках. На примере $\to$ и $\leftarrow$ мы увидели, что выбор языка, для которого мы строим классические матрицы, играет значительно большую роль, чем в двухзначном случае. Например, класс

$8Kb^*$ оказывается изоморфен классу $8Kb$, только если в первом используется $\leftarrow$ как одна из базовых операций. Поэтому, хотя условия стандартности Россера–Тюркетта и удобны, они не подходят для общего описания многозначных матриц классической логики или TL-матриц. В работе [1] предложен альтернативный подход — матрицы, задающие классическое отношения следования, описываются в терминах замкнутых классов функций:

- Если k-значная матрица порождает классическое отношение следования, то все ее операции содержатся в предполном классе P_k, сохраняющем двухчастное разбиение множества-носителя.
- Если матрица M порождает классическое отношение следования, то класс ее операций не содержится ни в одном из прообразов предполных классов P_2 относительно матричного гомоморфизма из M на двузначную Булеву матрицу.

Это дает нам необходимые и достаточные условия, которым должен отвечать класс операций, чтобы на его основе можно было построить многозначную матрицу классической логики или TL-матрицу. Но возможно ли сформулировать аналогичные условия, которые позволят определить, является ли некоторая матрица функциональным расширением классической?

Нетрудно сформулировать достаточное условие: матрица является функциональным расширением классической логики, если класс ее базовых операций содержит как подкласс, выполняющий приведенные выше условия, так и по меньшей мере одну операцию, нарушающую первое из них. Однако многие примеры из Части I показывают, что в общем случае это не так. В то время как матрицы из $8Kb$ явным образом строятся как выполняющие достаточное условие, для матриц P_3, $Ł_3$ и B_3 нам пришлось доказывать наличие формулировок, функционально эквивалентных исходным, демонстрируя выразимость тех или иных операций.

Хотя Я. Калицкий предложил алгоритм, который позволяет построить все функции заданной местности, выразимые посредством некоторого набора функций [32], как показал Н.Р. Емельянов [4], в

k-значной логике при $k > 2$ задача о выразимости функции через функции определенной системы является NP трудной задачей. Следовательно, такой же трудностью обладает и задача о соответствии класса операций матрицы достаточным условиям, приведенным выше. Вопрос о более простом критерии, которому должны соответствовать операции матрицы, чтобы она являлась функциональным расширением классической, остается открытым.

Литература

[1] *Девяткин Л.Ю.* О конечнозначных логических матрицах, порождающих классическое отношение следования // Логико-философские штудии. 2016. Т. 13. № 2. URL: http://ojs.philosophy.spbu.ru/index.php/ lphs/article/view/438 (дата обращения: 15.10.2016).

[2] *Девяткин Л.Ю., Карпенко А.С., Попов В.М.* Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. 2007. Т. XVIII. С. 50–62.

[3] *Девяткин Л.Ю., Преловский Н.Н., Томова Н.Е.* В границах трехзначности. М.: ИФ РАН, 2015. 136 с.

[4] *Емельянов Н.Р.* О сложности задачи выразимости в многозначных логиках // Доклады Академии Наук СССР. 1985. Т. 282. № 3. С. 525–529.

[5] *Карпенко А.С.* Развитие многозначной логики. М.: ЛКИ, 2010. 448 с.

[6] *Карпенко А.С., Томова Н.Е.* Трехзначная логика Бочвара и литеральные паралогики. М.: ИФ РАН, 2016. 110 с.

[7] *Рацa М.Ф.* О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского // Проблемы кибернетики. 1969. Вып. 21. С. 185–214.

[8] *Томова Н.Е.* О четырехзначных регулярных логиках // Логические исследования. М.: Наука, 2009. Вып. 15. С. 223–228.

[9] *Томова Н.Е.* Естественные p-логики // Логические исследования. Вып. 17. Изд-во ЦГИ, 2011. С. 256–268.

[10] *Томова Н.Е.* Естественные трехзначные логики: функциональные свойства и отношения. М.: ИФ РАН, 2012. 89 с.

[11] *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института им. В.А. Стеклова. Т. 51. М., 1958. С. 5—142.

[12] *Arieli O., Avron A.* Three-Valued Paraconsistent Propositional Logics // New Directions in Paraconsistent Logic / Ed. by J.-Y. Béziau et al. Springer India, 2015. P. 91–129.

[13] *Arieli O., Avron A., Zamansky A.* Maximally Paraconsistent Three-Valued Logics // Proceedings of the Twelfth International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning. Toronto, Ontario, Canada, 2010. P. 310–318.

[14] *Arieli O., Avron A., Zamansky A.* Maximal and Premaximal Paraconsistency in the Framework of Three-Valued Semantics // Studia Logica. 2011. Vol. 97. No. 1. P. 31–60.

[15] *Batens D., De Clercq K., Kurtonina N.* Embedding and Interpolation for some Paralogics. The Propositional Case // Reports on Mathematical logic. 1999. Vol 33. P. 29–44.

[16] *Brunner A.B., Carnielli W.A.* Anti-Intuitionism and Paraconsistency // Journal of Applied Logic. 2005. Vol. 3. No. 1. P. 161–184.

[17] *Carnielli W., Coniglio M.E., Marcos J.* Logics of Formal Inconsistency // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 14. Springer Netherlands, 2007. P. 1–93.

[18] *Church A.* Non-Normal Truth-Tables for the Propositional Calculus // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1953. Vol. 10. P. 41–52.

[19] *Ciuciura J.* A Weakly-Intuitionistic Logic I1 // Logical Investigations. 2015. Vol. 21. No. 2. P. 53–60.

[20] *Cobreros P.* Vagueness: Subvaluationism // Philosophy Compass. 2013. Vol. 8. No. 5. P. 472–485.

[21] *Da Costa N.C.A.* On the Theory of Inconsistent Formal Systems // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1974. Vol. 15. No. 4. P. 497–510.

[22] *D'Ottaviano I.M.L.* The Completeness and Compactness of a Three-Valued First-Order Logic // Revista Colombiana de Matematicas. 1985. Vol. 19. P. 77–94.

[23] *D'Ottaviano I.M.L., da Costa N.C.A.* Sur un problème de Jaśkowski // Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris. Ser. A. 1970. Vol. 270. P. 1349–1353.

[24] *Epstein R.L.* The Semantic Foundations of Logic. Vol. 1: Propositional logic. Dordrecht: Kluwer, 1990. 388 p.

[25] *Ferguson T.M.* Łukasiewicz Negation and Many-Valued Extensions of Constructive Logics // Proceedings of the 44th International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2014). IEEE Computer Society Press, 2014. P. 121–127.

[26] *Finn V.K., Grigolia R.* Nonsense Logics and their Algebraic Properties // Theoria. 1993. Vol. 59. No. 1–3. P. 207–273.

[27] *Gödel K.* On the Intuitionistic Propositional Calculus / *Gödel K.* Collected works I: Publications 1929–1936 / Ed. by S. Feferman et al. Oxford University Press, 1986. P. 223–225.

[28] *Goodman N.D.* The Logic of Contradiction // Mathematical Logic Quarterly. 1981. Vol. 27. No. 8–10. P. 119–126.

[29] *Goré R.* Dual Intuitionistic Logic Revisited // Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods / Ed. by R. Dyckhoff. Springer-Verlag, 2000. P. 252–267.

[30] *Humberstone L.* The Connectives. MIT Press, 2011. 1512 p.

[31] *Hyde D.* From Heaps and Gaps to Heaps of Gluts // Mind. 1997. Vol. 106. No. 424. P. 641–660.

[32] *Kalicki J.* A Test for the Existence of Tautologies According to Many-Valued Truth-Tables // Journal of Symbolic Logic. 1950. Vol. 15(3). P. 182–184.

[33] *Karpenko A.S.* A Maximal Paraconsistent Logic: the Combination of Two Three-Valued Isomorphs of Classical Propositional Logic // Frontiers of Paraconsistent Logic / Ed. by D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, J.-P. van Bendegem. Baldock Research Studies Press, 2000. P. 181–187.

[34] *Karpenko A.S., Tomova N.E.* Bochvar's Three-Valued Logic and Literal Paralogics: Their Lattice and Functional Equivalence // Logic and Logical Philosophy. 2016. URL: http://apcz.pl/czasopisma/index.php/LLP/article/view/LLP.2016.029 (дата обращения: 21.10.2016).

[35] *Kleene S.C.* On Notation for Ordinal Numbers // The Journal of Symbolic Logic. 1938. Vol. 3. No. 4. P. 150–155.

[36] *Kubyshkina E., Zaitsev D.V.* Rational Agency From a Truth-Functional Perspective // Logic and Logical Philosophy. 2016. Vol. 25. No. 4. P. 499–520.

[37] *Loparic A., da Costa N.C.A.* Paraconsistency, Paracompleteness, and Valuations // Logique et Analyse. 1984. Vol. 27. No. 106. P. 119–131.

[38] *Lewin R.A., Mikenberg I.F.* Literal-Paraconsistent and Literal-Paracomplete Matrices // Mathematical Logic Quarterly. 2006. Vol. 52. No. 5. P. 478–493.

[39] *Marcos J.* Nearly Every Normal Modal Logic is Paranormal // Logique et Analyse. 2005. Vol. 48. No. 189–192. P. 279–300.

[40] *Marcos J.* On a Problem of da Costa // Essays on the Foundations of Mathematics and Logic 2 / Ed. by G. Sica. Polimetrica, 2005. P. 53–69.

[41] *McKinsey J.C.C., Tarski A.* On Closed Elements in Closure Algebras // Annals of Mathematics. Second Series. 1946. Vol. 47. No. 1. P. 122–162.

[42] *Monteiro A.* Sur les Algèbres de Heyting Symétriques // Portugaliae Mathematica. 1980. Vol. 39. No. 1–4. P. 1–237.

[43] *Priest G.* Logic of Paradox // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 219–241.

[44] *Priest G.* Paraconsistent Logic // Handbook of Philosophical Logic / Ed. by Dov M. Gabbay, F. Guenthner. Springer Netherlands, 2002. P. 287–393.

[45] *Rasiowa H., Sikorski R.* The Mathematics of Metamathematics. Warszawa, 1963. 520 p.

[46] *Rauszer C.* Semi-Boolean Algebras and Their Applications to Intuitionistic Logic with Dual Operations // Fundamenta Mathematicae. 1974. Vol. 83. No. 3. P. 219–249.

[47] *Rescher N.* Many-Valued Logic. New York: McGraw-Hill, 1969. Reprinted: Aldershot: Gregg Revivals, 1993. 349 p.

[48] *Ripley D.* Sorting out the Sorites // Paraconsistency: Logic and Applications / Ed. by K. Tanaka, F. Berto, E. Mares, F. Paoli. Springer Netherlands, 2013. P. 329–348.

[49] *Segerberg K.* A Contribution to Nonsense-Logic // Theoria. 1965. Vol. 31. P. 199–217.

[50] *Sette A.M.* On propositional calculus P^1 // Mathematica Japonica. 1973. Vol. 18. P. 173–180.

[51] *Sette A.M., Carnielli W.A.* Maximal Weakly-Intuitionistic Logics // Studia Logica. 1995. Vol. 55. P. 181–203.

[52] *Shoesmith D.J., Smiley T.J.* Deducibility and Many-Valuedness // The Journal of Symbolic Logic. 1971. Vol 36. No. 4. P. 610–622.

[53] *Shoesmith D.J., Smiley T.J.* Multiple-Conclusion Logic. Cambrige University Press, 1978. 409 p.

[54] *Shramko Y., Wansing H.* Entailment Relations and/as Truth Values // Bulletin of the Section of Logic. 2007. Vol. 36. No. 3–4. P. 131–144.

[55] *Tomova N.E.* A Lattice of Implicative Extensions of Regular Kleene's Logics // Reports on Mathematical Logic. 2012. No. 47. P. 173–182.

[56] *Tranchini L.* Natural Deduction for Dual-Intuitionistic Logic // Studia Logica. 2012. Vol. 100. No. 3. P. 631–648.

[57] *Urbas I.* Dual-Intuitionistic Logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1996. Vol. 37. No. 3. P. 440–451.

[58] *Wansing H.* Constructive Negation, Implication, and Co-implication // Journal of Applied Non-Classical Logics. 2008. Vol. 18. No. 2–3. P. 341–364.

[59] *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer, 1988. 474 p.

Логические исследования
2017. Т. 23. № 1. С. 48–56
УДК 164.07+510.64

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 1, pp. 48–56
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-1-48-56

E.F. Karavaev

One Way to Determine the Intervals in Hybrid Temporal Logic

Karavaev Eduard Fedorovich
Department of Logic, Institute of Philosophy, Saint Petersburg State University
5 Mendeleevskaya Liniya, St. Petersburg, 199034, Russian Federation
E-mail: EK1549@ek1549.spb.edu

This presentation discusses the opportunity of improvement of technical means of hybrid temporal logic through the introduction of time intervals. In the procedure of constructing intervals the author of the presentation follows ideas and development expressed and carried out by A.A. Markov in his article published in 1932. So the 'Priorean paradigm' of understanding of the logic (temporal qualification of judgments and the idea of hybrid logic) is complemented by a building of time metric based on the relation 'earlier than'. It seems that the described improvement of the machinery of temporal logic allows, in particular, to perfect the approaches to the modelling of planning and strategic management.

Keywords: temporal logic, hybrid logic, satisfaction judgment, nominal-interval, discreteness of time, tree temporal structure, strategy, planning, management

Introduction

In standard ('Kripkean') semantics for temporal logic the truth-values of statements are correlated with some points in time. So we can translate from natural language to the formalized one, for example, the proposition "it's snowing" as $\boldsymbol{p}$, having in mind that it at *different* times has got *different* truth-values. Now, pay attention to the fact that there are judgments expressed in natural language which are true only in *one particular time.* For example, the judgment "it is five o'clock 4 December 1914"[1] is true (i.e., now "was true") at five o'clock 4 December 1914

[1]Recall that this is the date of birth of the founder of temporal logic Arthur Norman Prior, who has made also a substantial contribution to establishment of hybrid logic.

and is false during all other times (before and after the specified time). For a possibility of conversion from natural language to the formal language namely of such statements, i.e. the accounting of a highly specific characteristics of the logical form of thought is designed *hybrid temporal logic*.

In the hybrid logic a special kind of propositional letters is introduced. These letters are called *nominals*. The proposition designated by a given nominal expresses the judgment which is true only in one particular time. Thus the nominal designates some term which is correlated with a certain time. Another technical detail is the so-called *satisfaction operators*. Now the thought that the judgment "it's snowing" is true at five o'clock, 4 December 1914, or, closer to the natural way of speaking, "at five o'clock, 4 December 1914 it's snowing", can be presented on a formalized language of logical analysis well in a certain way; for example: $@_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{p}$. Here the nominal $\boldsymbol{a}$ stands for "it's five o'clock, 4 December 1914", and the 'ordinary' propositional $\boldsymbol{p}$ stands for "it's snowing"; the ingredient $@_{\boldsymbol{a}}$ is the satisfaction operator. (Of course, in full the description of the design world point you need to specify the spatial coordinates; for example, for the new Zealand city Masterton the latitude and the longitude, respectively, are: $41°17'20''$S, $174°46'38''$E; as for the third coordinates, that is, when choosing the centre of the Earth as a starting point, it is approximately equal to the value of the radius of Earth, 6371 km.)

In general, if a is $\boldsymbol{a}$ nominal, and $\boldsymbol{\varphi}$ is any (well-formed) formula, then we will call the formula $@_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\varphi}$ a *satisfaction judgment*. In addition to nominals and satisfaction operators, in hybrid logic we use the so-called *delimiters* $\boxdot$ and $\downarrow$ which enable us to construct formulas of form $\boxdot_{\boldsymbol{w}}@_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\varphi}$ and $\downarrow_{\boldsymbol{w}} @_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\varphi}$. Delimiters bound an occurrence of nominals: a delimiter of the type $\boxdot$ carries out quantification of time moments like a universal quantifier and the delimiter of the type $\downarrow$ acts like an existential quantifier. More precisely: $\boxdot_{\boldsymbol{w}}@_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\varphi}$ is true in some possible world $\boldsymbol{w}$ if and only if whenever a nominal $\boldsymbol{a}$ applies to it the formula $\boldsymbol{\varphi}$ the formula is true in relation to this world $\boldsymbol{w}$; $\downarrow_{\boldsymbol{w}} @_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\varphi}$ is true in some possible world $\boldsymbol{w}$ if and only if $\boldsymbol{\varphi}$ is true in relation to this world $\boldsymbol{w}$ and the nominal $\boldsymbol{a}$ is applies to the world $\boldsymbol{w}$.

1. An improvement of technical means of hybrid temporal logic

It is possible, on the basis of the A.A. Markov's work (1932) [13])[2], to offer a way of definition for *a nominal interval*. Let $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$ be two world (space-time) points, and $\boldsymbol{x}$ is earlier than $\boldsymbol{y}$; we denote this *asymmetrical* and *transitive* relation by $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$. We introduce the notion of *chain*: if $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$ are the world points and (1) $\boldsymbol{z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n}$ is such a finite sequence that (2) $\boldsymbol{x = z_0 \prec z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec \ldots \prec z_n = y}$, then the sequence (1) is the *chain* between $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$.

Each of oriented pairs $\boldsymbol{(z_{i\text{-}1}, z_i)}$, $\mathbf{i = 1, 2, 3, \ldots, n}$ which satisfies the condition $\boldsymbol{z_{i\text{-}1} \prec z_i}$ is called *a link of the chain*. Further, introduce *the postulate of finiteness*: the chain between any two points may not contain arbitrarily large number of links. Note that the introduction of such the postulate of finiteness is, of course, the recognition of the *discreteness of time*. Recall, however, that according to the V.A. Kotelnikov's theorem (1933) [12], a function, the range of changes which is limited to a certain frequency $\boldsymbol{F}_e$, can be fully represented by the sequence of its readout values that follow each other with the following time interval: $\boldsymbol{1/2F}_e$.

Next, introduce *an atomic relation*. Let (1) $\boldsymbol{z_{i\text{-}1} = z_{i,0} \prec z_{i,1} \prec z_{i,2} \prec z_{i,3} \prec \ldots \prec z_{i,m(i)} = z_i}$ where $\mathbf{i = 1, 2, 3, \ldots, n}$ are $\mathbf{n}$ chains between all successive (1). If in doing so there is at least one element $\mathbf{m(i)}$ which different from 1 among $\mathbf{n}$ integers we say that the chain (4) $\boldsymbol{x = z_{0,0} \prec z_{0,1} \prec z_{0,2} \prec z_{0,3} \prec \ldots \prec z_{0,m(0)} \prec z_{1,0} \prec z_{1,1} \prec z_{1,2} \prec z_{1,3} \prec \ldots \prec z_{1,m(1)} \prec z_{2,0} \prec z_{2,1} \prec z_{2,2} \prec z_{2,3} \prec \ldots \prec z_{2,m(2)} \prec z_{i,0} \prec z_{i,1} \prec z_{i,2} \prec z_{i,3} \prec \ldots \prec z_{i,m(i)} \prec \ldots \prec z_{n,0} \prec z_{n,1} \prec z_{n,2} \prec z_{n,3} \prec \ldots \prec z_{n,m(n)} = y}$ is obtained from the chain (1) by means of its *refinement*. Obviously, if the postulate of finiteness has been introduced, the procedure of refinement cannot last forever. So we come to the concept of *a saturated chain*. A single-link saturated chain is *a chronus* and an arbitrary saturated chain is *a chronusean chain*.

Let $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$. With the postulate of finiteness, natural numbers, representing the number of chain links between $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$ form a *limited*

[2]The author of this article was acquainted with the translation of the Markov's work thanks to his teacher and Markov's pupil, N.A. Shanin (in the late 1980s); the translation was made by R.I. Pimenov.

set. And so among them there is the *largest* number that represents the maximum number of links in the chains between $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$. And you can define a positive integer function: $\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ is defined if and only if $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$; $\sigma(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \mathbf{1}$ if and only if the pair $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ forms the chronus.

Thus, the relation 'earlier than', satisfying the postulate of finiteness, induces *a metrics* of time intervals. We got a natural measure for time intervals: number $\sigma(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ is a measure of the interval $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$. And if the world points $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ are nominals and, together with it, are the end points of the line formed by the other world points, which are also the nominals we obviously get an *interval-nominal* or a *nominal interval.* (Note that the delimiter of the type $\boxdot$ is not a thing like that: it's not bringing us to the metrics of time.)

Note that to use the discrete time structure is quite realistic, in terms of cognitive processes. For example, research performed by J.M. Stroud [18], and research performed by R. Efron [2] have shown that the minimum perceived quantum of simultaneity of two events is 60–100 msec. Currently the opinion that the perception of time is discrete, reinforced by numerous experienced data, is widespread ([19]). It seems that the mechanism that causes the discreteness of the perception of time can be explained by the 'theory of the scanning alpha rhythms', which was proposed by the outstanding American-born British neurophysiologist and robotician W. Grey Walter [3]. Alpha-rhythm is a scanning mechanism of the brain and due to the dissemination of wave excitation on the bark of the big hemispheres. Such a 'scanning' is carried out in the rhythm of 80–120 ms. In between waves of the excitation brain cells are not active. So between the two outbreaks of alpha-activity the temporal order does not matter.

2. An improvement of approaches to the modeling of planning and strategy management

Following the 'Priorean paradigm' of understanding of logic (see her detailed presentation in: [14], I first tried to combine various qualifications logical form of thoughts, especially emphasizing the importance of the temporal qualifications, and, secondly, relied on the model of the discrete time (see [5–8]).

It is possible to show how in the framework of the Priorean paradigm we can improve approaches to the modelling of planning and strategic management. We have done it in some articles (see [9–11]). The articles deal with an analytical account of the H. Simon's conception of 'bounded rationality' (see [16–17]) and make a substantial addendum to it. It concerns the famous 'Condorcet's paradox' and the impossibility of building a 'flawless' regulatory code. Further, these deal with some considerations of possibilities to apply the means of non-classic logic (temporal, deontic, alethic modal, epistemic, hybrid logic and logic of agency) for improvement of formalized representation of planning procedures. Ways of improvement of afore-mentioned model are employing M. Raynor's experimental data (and theoretical ideas) connected with the 'strategy paradox' are suggested (see [15]).

The structure of plan of our actions related to the achievement of some objective may be presented by means of *a tree temporal structure* (or 'branching time') that is used in the semantic development of temporal logic. A constructed tree structure, of course, will not be 'perfect'. Every branching and total number of them it is possible to determine only approximately. Limitations of our rationality are conditioned by many factors: (1) the lack of complete information about a set of alternatives; (2) the complexity of the calculation of alternatives and, as a result, the inability to them all; (3) the uncertainty of the effects to be expected from each alternative. We will also always remember the time factor and the principle *ceteris paribus*, i.e. positing that the factors which, as we suppose, do not change during the time when interesting for us situation takes place may be ignored. In psychology, the provisions of this kind are described with using the concept of 'the level of claims'. Psychological and epistemological aspects of the named principle successfully set out by D. Kahneman: WYSIATI, i.e. "What you see is all there is" (see [4, pp. 85–88]).

So it is not possible to speak not only about creating *optimum*, i.e. generally the best strategy: we cannot ensure even *satisfactory* strategy, i.e., best of the many alternatives that we watch, and we can have only the strategy, which meets certain goals and criteria at a certain level.

In the branching points of the structure, we meet with the 'Condorcet's paradox' (see [1]). It may happen, for example, that three alternative continuations of the plan ('the branches of the tree') $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{C}$ which are valued, for example, again, in respect of three parameters, are such ones that the first of them is better than the two others in respect of the first characteristics, the second — in respect of the second and the third — in respect of the third. The proportion of this kind of possible 'deadlocks' is quite considerable — about from 5.6% to 8.8%. This is the so-called 'Condorcet's effect'. Obviously, we have to use some additional considerations. For example, considering that since none of the alternatives is worse than the other, to select it. But, notice that we do not know what 'the road ahead'.

Raynor, with very representative data (obtained in his work in the consulting firm), noticed that the most successful companies often have more in common with companies that failed and no longer in business, than they do with companies that have managed merely to survive. The successful companies, as well as many of the failed ones, aimed to be leaders in their industries and market segments. The former made it. The latter did not. The 'strategic trees' of companies-losers are not worse than ones of successful companies; both those and others may be equally 'great'. Often, the only discernible difference between the two is *the element of luck (or bad luck)*. In other words, it often happens so, that the strategy of the 'lucky' is much more similar to the real objective course of events than a strategy of 'loser'. You can even say so: it happens that the strategy most likely to have success also most likely to be a failure.

Importance of the hybrid logic for the analyzed here theme of formalization, i.e. of introducing clarity into descriptions of procedures of planning activities, is quite obvious. In fact, using these funds, we 'bind' our plan to the real calendar (and the real clocks). In addition, the use of intervals can overcome some technical difficulties relating to the construction of function of distribution of random variables related to the points of branching 'strategic tree'. This question requires special consideration and is linked with the fact that the probability of any particular value of a continuous random variable equal to zero.

We don't want to end our consideration on the 'somber note'. Strategies must, by definition, be based on our best assumptions about the future, but that future will change in ways that we did not foresee. In real life events will happen that we never anticipated and to which we must react. For 'doing nothing' is also a strategy. Raynor reminds a thought of Louis Pasteur that in science luck favors the prepared mind, which is looking for her. Let us add this idea by the Russian saying: "Ah! Misfortune has no mater"[3]. Or by English one: "Hope for the best and prepare for the worst".

References

[1] Arrow, K.J. *Social Choice and Individual Values*. New York; London; Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1964. 124 pp.

[2] Efron, R. "Conservation of temporal information by perceptual systems", *Percept Psychophys*, 1973, vol. 14, pp. 518–530.

[3] Grey Walter, W. *The Living Brain*. London: Pelican Books, 1963. 311 pp.

[4] Kahneman, D. *Thinking, fast and slow*. New York.: Farrar, Straus and Giroux, 2011. 499 pp.

[5] Karavaev, E.F. "On some logical principles in resolving of moral problems", in: *Ethics in Sciences*. Workshop, 14–16 July, 1997 at Tuebingen. Reader: Statements/ Lectures. Tuebingen: Internatoinales Zenttrum, 1997, pp. 41–53.

[6] Karavaev, E. F. "Logic and Moral Dilemmas", in: *The Proceedings of the Twentieth World Congress of Philosophy* (Boston, 10–16 August, 1998) [http://www.bu.edu/wcp, accessed on 01.06.2016].

[7] Karavaev, E.F. "On temporal qualification of normative propositions", in: *Vos'mye Smirnovskie chteniya po logike* [The 2th International Conference "Smirnov's Readings"] (Moscow, May 1999). Moscow: IF RAS, 1999, pp. 111–114. (In Russian)

[8] Karavaev, E.F. "A deontic logic with temporal qualification", in: *Time and history. Proceedings of the 28 International Ludwig Wittgenstein Symposium*, ed. by Fr. Stadler, M. Stö ltzner. Frankfurt et el.: Ontos Verlag, 2006, pp. 459–467.

[3] Perhaps, this is the best English translation of proverb, proposed by A.S. Pushkin in his 'Captain's daughter' at the beginning of the third chapter. It was made by M.H. de Zielinska. (Pushkin, A.S. *A Story of Russian Love*. Chicago, 1914, p. 53).

[9] Karavaev, E.F. “Dopolnenie contseptsii ’ogranichennoy ratsional’nosti’ Saimona” [An addition of the Simon’s concept of ‘bounded rationality’], *Vestnik Sankt-Petersburgskogo Gosudarstvennogo Universiteta* [The Bulletin of the Saint-Petersburg State University], 2002, series 6, issue 3, pp. 33–37. (In Russian)

[10] Karavaev, E.F. “Sredstva neclassicheskoy logiki dlya formalizatsii protsedur planirovania” [The means of non-classical logic for formalization of planning procedures], *Vestnik Sankt-Petersburgskogo Gosudarstvennogo Universiteta* [The Bulletin of the Saint-Petersburg State University], 2008, series 6, issue 1, pp. 87–94. (In Russian)

[11] Karavaev, E.F. “Ob usovershenstvovannoy logicheskoy modeli planirovania na osnove eksperimental’nykh dannykh o «paradokse strategii»” [On improving logical model of planning on the basis of experimental data of a «paradox strategy»], *Vestnik Sankt-Petersburgskogo Gosudarstvennogo Universiteta* [The Bulletin of the Saint-Petersburg State University], 2009, series 6, issue 3, pp. 97–105. (In Russian)

[12] Kotelnikov, V.A. “On the transmission capacity of the ‘ether’ and of cables in electrical communication” [O propusknoy sposobnosti efira i provoloki v elektrosvyazi], in: *Materialy k I Vsesouznomu s’ezdu po voprosam tekhnicheskoy rekonstrukcii dela svyazi i razvitiya slabotochnoy promyshlennosti* [Proceedibgs of the 1st All-Union Conference on Technological Reconstruction of the Communication and Low-Current Engineering]. Translation by C.C. Bissell and V.E. Katsnelson, Moscow, 1933, pp. 1–19.

[13] Markoff A. “Uber die Ableitbarkeit der Weltmetrik aus der «Fruher Als» — Beziehung”, *Physikalische Zeitschrift der Soviet Union.* 1932, band 1, heft 3, ss. 387–406.

[14] Øhrstrøm, P., Hasle, Per F.V. *Temporal Logic: from Ancient Ideas to Artificial Intelligence.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publ. Group, 1995. 414 pp.

[15] Raynor, M. E. *The Strategy Paradox: Why Committing to Success Leads to Failure (and What to do about it).* New York: Doubleday Books, 2007. 320 pp.

[16] Simon, H. *The sciences of the artificial.* Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1969. 246 pp.

[17] Simon, H. “Rational decision making in business organizations”, *The American economic review.* 1979, vol. 69, issue 4, pp. 493–513.

[18] Stroud, J.M. "The fine structure of psychological time", in: *Annals of the New York Academy of Sciences*. 1967, vol. 138. (Interdisciplinary Perspectives of Time), pp. 623–631; originally published as: Stroud, J. M. "The fine structure of psychological time", *Information theory in Psychology*, ed. by H. Quastler. Chicago, Ill: Free Press. 1956, pp. 174–205.

[19] Van Rullen, R., Koch, C. "Is perception discrete or continuous?", *Trends in Cognitive Sciences*, 2003, Vol. 7, No. 5 (May), pp. 207–213.

Логические исследования
2017. Т. 23. № 1. С. 57–82
УДК 164.07+510.649

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 1, pp. 57–82
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-1-57-82

В.М. Попов

К проблеме характеризации логик васильевского типа: о табличности логик $I_{\langle x,y\rangle}(x, y \in$**{0, 1, 2,...}** и $x < y$). Часть I[1]

Попов Владимир Михайлович
Кафедра логики, философский факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4
E-mail: pphiloslog@mail.ru

Памяти российского философа и логика
Елены Дмитриевны Смирновой,
выдающегося специалиста в области логической семантики,
посвящается

В этой статье, продолжающей работу, проводимую в [1], изучается проблема табличности I-логик васильевского типа (пропозициональная логика называется табличной, если она имеет конечную характеристическую матрицу). Основной результат, полученный в данной статье: для всяких целых неотрицательных чисел x и y, первое из которых меньше второго, логика $I_{\langle \mathrm{x,y}\rangle}$ таблична (класс всех таких логик является бесконечным подклассом класса всех I-логик васильевского типа). Предлагаемое исследование основано на использовании результатов, полученных в [1], и на применении авторской кортежной семантики. Для достижения указанного основного результата мы показываем, как по произвольным целым неотрицательным числам m и n, удовлетворяющим неравенству $m < n$, строится логическая матрица $\mathfrak{M}(m, n)$, которая является конечной характеристической матрицей логики $I_{\langle m,n\rangle}$. Поскольку носитель логической матрицы $\mathfrak{M}(m, n)$ есть некоторое множество 0-1-кортежей, семантику, базирующуюся на этой логической матрице, естественно называть кортежной семантикой. Важное замечание: статья публикуется в два приема. Перед вами первая часть статьи, вторую часть статьи планируется опубликовать во втором номере «Логических исследований» за 2017 год.

Ключевые слова: I-логика $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $m < n)$, двузначная семантика I-логики $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $m < n)$, кортежная семантика I-логики $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $m < n)$

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 16-03-00224а.

Цель работы — доказательство того, что для всяких таких целых неотрицательных чисел x и y, что $\mathrm{x} < \mathrm{y}$, логика $I_{\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle}$ таблична. С этой целью здесь показано, как по произвольным целым неотрицательным числам m и n, удовлетворяющим неравенству $m < n$, строится логическая матрица $\mathfrak{M}(m,n)$, которая является характеристической матрицей логики $I_{\langle m,n\rangle}$. Семантику, базирующуюся на логической матрице $\mathfrak{M}(m,n)$, называем кортежной семантикой. В данном контексте введение термина «кортежная семантика» мотивировано тем, что носитель логической матрицы $\mathfrak{M}(m,n)$ есть некоторое множество 0-1 -кортежей. Как и в работе [1], курсивные буквы (иногда с индексами) латинского и греческого алфавитов обозначают параметры, а прямые буквы (также иногда с индексами) указанных алфавитов используются в качестве связанных переменных.

Нам потребуется стандартно определяемый пропозициональный язык L, алфавиту которого принадлежат в точности следующие символы: $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (пропозициональные переменные языка L), $\&, \vee, \supset$ (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L), левая и правая круглые скобки. Множество всех пропозициональных переменных языка L обозначаем через Prop_L. Определение L-формулы индуктивно: (1) всякая пропозициональная переменная языка L есть L-формула, (2) если A и B являются L-формулами, то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, и $(\neg A)$ являются L-формулами, (3) ничто другое не является L-формулой. Квазиэлементарной L-формулой называем L-формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка L. Длиной L-формулы называем, как это принято, число всех вхождений символов $\&, \vee, \supset, \neg$ в эту L-формулу. Ясно, что для всякой L-формулы существует единственная длина этой L-формулы и что длина всякой L-формулы есть целое неотрицательное число. Обозначаем длину L-формулы через $h(A)$. Условимся обозначать через λ отображение множества $\{1,\ 2,\ldots\}$ всех целых положительных чисел в одноэлементное множество $\{\neg\}$.

Соглашение 1: для всякой L-формулы A $\neg^{[0]}(A)$ есть A.

Соглашение 2: для всякой L-формулы A и для всякого целого положительного числа d $\neg^{[\mathrm{d}]}(A)$ есть сокращение для $(\lambda(\mathrm{d})\ldots(\lambda(1)A)\ldots)$.

Замечание 1: для всякой L-формулы A и для всякого целого положительного числа d $\neg^{[0]}(A)$ и $\neg^{[\mathrm{d}]}(A)$ являются L-формулами.

Замечание 2: можно доказать, что для всякого A и для всякого целого неотрицательного числа k:A есть квазиэлементарная L-формула длины k тогда и только тогда, когда A есть $\neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q})$ для некоторой пропозициональной переменной q языка L.

Логикой называем непустое множество L-формул, замкнутое относительно правила modus ponens в L и относительно правила пропозициональной подстановки в L (последнее правило есть правило подстановки L-формулы в L-формулу вместо пропозициональной переменной языка L).

Следуя [1], покажем как по любым x и y из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ определяется исчисление $HI_{\langle \mathrm{x,y}\rangle}$ гильбертовского типа и множество $I_{\langle \mathrm{x,y}\rangle}$. С этой целью условимся, что α и β принадлежат множеству $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$. Язык исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть L. Аксиомами исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ являются все те и только те L-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих двенадцати видов (здесь A, B и C – L-формулы):

(I) $((A \supset B)\supset((B \supset C)\supset(A \supset C)))$, (II) $(A \supset(A \vee B))$, (III) $(B \supset(A \vee B))$, (IV) $((A \supset C)\supset((B \supset C)\supset((A \vee B)\supset C)))$, (V) $((A\&B)\supset A)$, (VI) $((A\&B)\supset B)$, (VII) $((C \supset A)\supset((C \supset B)\supset(C \supset(A\&B))))$, (VIII) $((A \supset(B \supset C))\supset((A\&B)\supset C))$, (IX) $(((A\&B)\supset C)\supset(A \supset(B \supset C)))$, (X) $(((A \supset B)\supset A)\supset A)$, (XI,$\alpha$) $((\neg D)\supset(D \supset A))$, где D есть L-формула, которая не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$, (XII, β) $((E \supset(\neg(A \supset A)))\supset(\neg E))$, где E есть L-формула, которая не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \beta$.

Исчисление $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ имеет единственное правило — modus ponens в L.

В [1] даны следующие определения: (1) определение $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательства длины n (n есть целое положительное число) L-формулы A — определение 1 в [1], (2) определение $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательства L-формулы A — определение 2 в [1], (3) определение $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-вывода длины n (n есть целое положительное число) из множества M L-формул L-формулы A — определение 3 в [1], (4) определение $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-ввода из множества M L-формул L-формулы A — определение 4 в [1], (5) определение L-формулы, доказуемой в $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, — определение 5 в [1]. Эти определения стандартны и здесь не приводятся.

Соглашение 3: следуя работе [1], условимся о том, что (1) для всякого множества K L-формул и для всякой L-формулы F запись «$\mathrm{K}\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}\mathrm{F}$» есть сокращение для «существует $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-вывод из множества K L-формул L-формулы F», а запись «$\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}\mathrm{F}$» есть сокращение для «существует $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательство L-формулы F».

Вслед за [1] обозначаем через $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ множество всех L-формул, доказуемых в $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. Стереотипное доказательство того, что для всяких x и y из $\{0, 1, 2,\ldots\omega\}$ $I_{\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle}$ является логикой, здесь не приводим. Информация о том, какого рода логикой является $I_{\langle x,y\rangle}$, где x и y принадлежат множеству $\{0, 1, 2,\ldots\omega\}$, при тех или иных условиях, накладываемых на x или/и y, имеется в [1]. Следуя [1], называем I-логикой васильевского типа такую логику $I_{\langle x,y\rangle}$, что x и y принадлежат множеству $\{0, 1, 2,\ldots\omega\}$ и при этом $x \neq 0$ или $y \neq 0$. Очевидно, что для всяких x и y из $\{0, 1, 2,\ldots\omega\}$ верно следующее: если x $<$ y, то $I_{\langle x,y\rangle}$ есть I-логика васильевского типа. Опираясь на утверждение У7 из [1], можно доказать, что класс всех логик, каждая из которых есть $I_{\langle x,y\rangle}$ для некоторых таких x и y из $\{0, 1, 2,\ldots\omega\}$, что x $<$ y, бесконечен.

Для доказательства табличности интересующих нас логик потребуется двузначная семантика этих логик, которую мы построим, используя результаты работы [1]. Условимся, что далее везде m и n являются целыми неотрицательными числами и $m < n$.

Определение 1. $I_{\langle m,n\rangle}$-предоценкой называем отображение множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, в множество $\{0, 1\}$.

Определение 2. $I_{\langle m,n\rangle}$-оценкой называем $I_{\langle m,n\rangle}$-предоценку v, выполняющую для всякой квазиэлементарной L-формулы Q следующее условие: если $m \leq$h(Q)$< n$ и v(Q)=1, то v((¬Q))=0.

Определение 3. $I_{\langle m,n\rangle}$-означиванием при $I_{\langle m,n\rangle}$-оценке называем такое отображение f множества всех L-формул в множество {0,1}, что выполняются следующие условия:

(1) для всякой квазиэлементарной L-формулы A, длина которой $\leq n$, f(A)= v(A);
(2) для всякой квазиэлементарной L-формулы A, длина которой $\geq n$: f((¬A))=1 тогда и только тогда, когда f(A)=0;
(3) для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой: f((¬A))=1 тогда и только тогда, когда f(A)=0;
(4) для всяких L-формул A и B:
f((A&B))=1 тогда и только тогда, когда f(A)=1 и f(B)=1,
f((A∨B))=1 тогда и только тогда, когда f(A)=1 или f(B)=1,
f((A⊃B))=1 тогда и только тогда, когда f(A)=0 или f(B)=1.

Замечание 3. Можно доказать, что для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v существует единственное $I_{\langle m,n\rangle}$-означивание при v.

Соглашение 4. Через $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}$ обозначаем $I_{\langle m,n\rangle}$-означивание при $I_{\langle m,n\rangle}$-оценке v.

Лемма 1. Для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v: либо $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}$(A)=1, либо $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}$ (A)=0.

Стереотипное доказательство леммы 1 здесь не приводим.

Руководствуясь работой [1], дадим определение (4) и определение (5).

Определение 4. Называем A и $I_{\langle m,n\rangle}$-общезначимой L-формулой, если для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(A)$=1.

Разумеется, всякая $I_{\langle m,n\rangle}$-общезначимая L-формула является L-формулой.

Определение 5. Говорим, что A $I_{\langle m,n\rangle}$-следует из M (или из M $I_{\langle m,n\rangle}$-следует A), если выполняются три условия: (1) A есть L-формула, (2) M есть множество L-формул, (3) для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v верно, что если $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}$=1 для всякой L-формулы B из M, то $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(A)$=1.

Теорема 1. Для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы A: M $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ A тогда и только тогда, когда A $I_{\langle m,n\rangle}$-следует из M.

Теорема 1 является простым следствием теоремы 7 работы [1]. Адекватность воспроизведенной здесь двузначной семантики логики $I_{\langle m,n\rangle}$ устанавливает следующая теорема 2, являющаяся следствием теоремы 9 работы [1].

Теорема 2. Для всякой L-формулы A: A $\in I_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда A есть $I_{\langle m,n\rangle}$-общезначимая L-формула.

При доказательстве табличности интересующих нас логик будем использовать предложенные автором кортежные семантики, адекватные этим логикам. Построим кортежную семантику, адекватную логике $I_{\langle m,n\rangle}$.

Определение 6. $\langle m,n\rangle$-кортеж есть такое отображение X множества $\{1,\ldots, n, n+1\}$ в множество $\{0,1\}$, что для всякого целого числа i: если $m+1 \leq$i$< n+1$ и X(i) $=1$, то X(i+1) $=0$.

Определение 7. Говорим, что a есть k-тый член $\langle m,n\rangle$-кортежа X, если $k \in\{1,\ldots, n, n+1\}$ и a=$X(k)$.

Замечание 4. Разумеется, существует единственное множество всех $\langle m,n\rangle$-кортежей и единственное множество всех таких $\langle m,n\rangle$-кортежей, первый член каждого из которых есть 1 (первое из этих множеств обозначаем через $C_{\langle m,n\rangle}$, а второе — через $D_{\langle m,n\rangle}$).

Определение 8. Выделенный $\langle m,n\rangle$-кортеж есть $\langle m,n\rangle$-кортеж из $D_{\langle m,n\rangle}$.

Определение 9. Нормальный $\langle m, n\rangle$-кортеж есть такой $\langle m, n\rangle$-кортеж X, что для всякого целого положительного числа i, которое $< n$+1, X(i)$\neq X$(i+1).

Определение 10. Единичный $\langle m, n\rangle$-кортеж есть нормальный $\langle m, n\rangle$-кортеж, первый член которого есть 1.

Определение 11. Нулевой $\langle m, n\rangle$-кортеж есть нормальный $\langle m, n\rangle$-кортеж, первый член которого есть 0.

Ясно, что существуют единственный единичный $\langle m, n\rangle$-кортеж и единственный нулевой $\langle m, n\rangle$-кортеж. Первый из этих $\langle m, n\rangle$-кортежей обозначаем через $1_{\langle m,n\rangle}$, а второй через $0_{\langle m,n\rangle}$. Ясно также, что для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y существует единственная упорядоченная пара, первый член которой есть X, а второй — Y.

Определение 12. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y: Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ тогда и только тогда, когда верно следующее: ($Z = 1_{\langle m,n\rangle}$, X(1)=1, Y(1)=1) или ($Z = 0_{\langle m,n\rangle}$, X(1)$\neq$1 или Y(1)$\neq$1).

Определение 13. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y: Z есть $\vee_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ тогда и только тогда, когда верно следующее: ($Z = 1_{\langle m,n\rangle}$, X(1)=1 или Y(1)=1) или ($Z = 0_{\langle m,n\rangle}$, X(1)$\neq$1, Y(1)$\neq$1).

Определение 14. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y: Z есть $\supset_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ тогда и только тогда, когда верно следующее: ($Z = 1_{\langle m,n\rangle}$, X(1)=0 или Y(1)=1) или ($Z = 0_{\langle m,n\rangle}$, X(1)$\neq$0, Y(1)$\neq$1).

Определение 15. Для всякого $\langle m, n\rangle$-кортежа X: Z есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X тогда и только тогда, когда Z есть такое отображение множества $\{1,\ldots, n, n{+}1\}$ в множество $\{0{,}1\}$, что верны следующие утверждения: (1) Z(1)=X(2),..., (n) $Z(n)$=X(n+1), (n+1,a) $Z(n{+}1)$=1, если X(n+1)=0, (n+1,b) $Z(n{+}1)$=0, если X(n+1)=1.

Замечание 5. Понятно, что для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y: любой $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ является отображением множества $\{1,\ldots,\ n,\ n{+}1\}$ в множество $\{0{,}1\}$, любой $\vee_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ является отображением множества $\{1,\ldots,\ n, n{+}1\}$ в множество $\{0{,}1\}$, любой $\supset_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ является отображением множества $\{1,\ldots, n,\ n{+}1\}$ в множество $\{0{,}1\}$, любой $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X является отображением множества $\{1,\ldots,\ n{,}n{+}1\}$ в множество $\{0{,}1\}$.

Замечание 6. Разумеется, что существует (а) единственное множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, (б) единственное множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\vee_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, (в) единственное множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\supset_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, (г) единственное множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle X, Z\rangle$, где X есть $\langle m, n\rangle$-кортеж, а Z есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X.

Соглашение 9. Множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, обозначаем через $\&_{\langle m,n\rangle}$.

Соглашение 10. Множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\langle m, n\rangle$-напарник упорядоченной пары $\langle m, n\rangle$, обозначаем через $\vee_{\langle m,n\rangle}$.

Соглашение 11. Множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\& \supset_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, обозначаем через $\supset_{\langle m,n\rangle}$.

Соглашение 12. Множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle X, Z\rangle$, где X есть $\langle m, n\rangle$-кортеж, а Z есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X, обозначаем через $\neg_{\langle m,n\rangle}$.

Лемма 2. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y и для всякого Z: если Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то Z есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

Докажем лемму 2.

(1) X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами (допущение).

(2) Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$ (допущение).

(3) ($Z = 1_{\langle m,n\rangle}$, $X(1){=}1$, $Y(1){=}1$) или ($Z = 0_{\langle m,n\rangle}$, $X(1){\neq}1$, $Y(1){\neq}1$) (из (2), по определению 12).

(4) $Z = 1_{\langle m,n\rangle}$ или $Z = 0_{\langle m,n\rangle}$ (из (3)).

Разумеется, что (5) $1_{\langle m,n\rangle}$ и $0_{\langle m,n\rangle}$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами.

(6) Z есть $\langle m, n\rangle$-кортеж (из (4) и (5)).

Снимая допущение (2) и обобщая, получаем, что

(7) для всякого Z: если Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то Z есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 2. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y и для всякого Z: если Z есть $\vee_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то Z есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

Доказательство леммы 3 аналогично данному выше доказательству леммы 2.

Лемма 4. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y и для всякого Z: если Z есть $\supset_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то Z есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

Доказательство леммы 4 аналогично данному выше доказательству леммы 2.

Лемма 5. Для всякого $\langle m,n\rangle$-кортежа X и для всякого Z: если Z есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа X, то Z есть $\langle m,n\rangle$-кортеж.

Докажем лемму 5.

(1) X есть $\langle m,n\rangle$-кортеж (допущение).

(2) Z есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа X (допущение).

Опираясь на утверждения (1) и (2) и определение 15, получаем, что

(3) Z есть такое отображение множества $\{1,\ldots,\ n,n{+}1\}$ в множество $\{0,1\}$, что верны следующие утверждения: (1) $Z(1)=$ X(2)$,\ldots,(n)Z(n)=\ X(n+1)$, $(n{+}1$,a$)Z(n{+}1)=1$, если X(n+1)=0, (n+1,b) $Z(n{+}1)=0$, если X(n+1)=1.

(4) X есть такое отображение множества $\{1,\ldots,\ n,n{+}1\}$ в множество $\{0,1\}$, что для всякого целого числа i: если $m{+}1\leq$ i $< n{+}1$ и X(i)=1, то X(i+1)=0 (из (1), по определению 6).

(5) i есть целое число (допущение).

(6) $m+1 \leq i < n+1$ и $Z(i) = 1$ (допущение).

(7) $m+1 \leq i < n+1$ (из (6)).

(8) $Z(i)=1$ (из (6)).

(9) $Z(i)= X(i{+}1)$ (из (3), (5) и (7)).

(10) $i < n$ или $i = n$ (из (5) и (7)).

(11) Для всякого целого i: если $m+1\ \leq$ i $<\ n+1$ и X(i)=1, то X(i+1)=0 (из (4)).

(12) $i < n$ (допущение).

(13) $i+1 < n+1$ (из (12)).

(14) $m + 1 \leq i$ (из (7)).

(15) $m + 1 \leq i + 1$ (из (14)).

(16) $m + 1 \leq i + 1 < n + 1$ (из (13) и (15)).

(17) $X(i + 1) = 1$ (из (8) и (9)).

Разумеется, что (18) $i + 1$ есть целое число.

(19) $X(i + 2) = 0$ (из (11), (16), (17) и (18)).

(20) $Z(i + 1) = 0$ (из (3), (13) и (19)).

Снимая допущение (12), получаем, что

(21) если $i < n$, то $Z(i + 1) = 0$.

(22) $i = n$ (допущение).

(23) $Z(n) = 1$ (из (8) и (22)).

(24) $Z(n){=}X(n{+}1)$ (из (9) и (22)).

(25) $X(n{+}1){=}1$ (из (23) и (24)).

(26) $Z(n{+}1){=}0$ (из (3) и (25)).

(27) $Z(i{+}1){=}0$ (из (22) и (26)).

Снимая допущение (22), получаем, что

(28) если $i = n$, то $Z(i{+}1){=}0$.

(29) $Z(i{+}1){=}0$ (из (10), (21) и (28)).

Снимая допущения (6) и (5) и обобщая, получаем, что

(30) для всякого целого числа i: если $m + 1 \leq \mathrm{i} < n + 1$ и $Z(\mathrm{i}){=}1$, то $Z(i{+}1){=}0$.

(31) Z есть отображение множества $\{1,\ldots,\ n, n{+}1\}$ в множество $\{0{,}1\}$ (из (3)).

(32) Z есть $\langle m,n\rangle$-кортеж (из (30) и (31), по определению 6).

Снимая допущение (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 5. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для всяких $\langle m,n\rangle$-кортежей X и Y существует единственный $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle$X, Y$\rangle$.*

Докажем лемму 6.

(1) X и Y являются $\langle m,n\rangle$-кортежами (допущение).

(2) $X(1)=1$ и $Y(1)=1$ (допущение).

(3) $1_{\langle m,n\rangle}$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$ (из (1) и (2), по определению 12).

(4) Существует $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$ (из (3)).

Снимая допущение (2), получаем, что

(5) если $X(1)=1$ и $Y(1)=1$, то существует $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$.

(6) $X(1)\neq 1$ или $Y(1)\neq 1$ (допущение).

(7) $0_{\langle m,n\rangle}$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$ (из (1) и (6), по определению 12).

(8) Существует $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$ (из (7)).

Снимая допущение (6), получаем, что

(9) если $X(1)\neq 1$ или $Y(1)\neq 1$, то существует $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$.

(10) Существует $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$ (из (5) и (9)).

(11) Z_1 и Z_2 являются $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарниками упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$ (допущение).

(12) ($Z_1 = 1_{\langle m,n\rangle}$, $X(1){=}1$, $Y(1){=}1$) или ($Z_1 = 0_{\langle m,n\rangle}$, $X(1){\neq}1$ или $Y(1){\neq}1$) (из (1) и (11), по определению 12).

(13) ($Z_2 = 1_{\langle m,n\rangle}$, $X(1){=}1$, $Y(1){=}1$) или ($Z_2 = 0_{\langle m,n\rangle}$, $X(1){\neq}1$ или $Y(1){\neq}1$) (из (1) и (11), по определению 12).

В свете утверждений (12) и (13) ясно, что верны следующие утверждения (14) и (15).

(14) Если $X(1){=}1$ и $Y(1){=}1$, то $Z_1 = Z_2$.

(15) Если $X(1){\neq}1$ или $Y(1){\neq}1$, то $Z_1 = Z_2$.

(16) $Z_1 = Z_2$ (из (14) и (15)).

Снимая допущение (11) и обобщая, получаем, что

(17) для всяких Z_1 и Z_2: если Z_1 и Z_2 являются $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарниками упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_2$.

В свете утверждений (10) и (17) ясно, что

(18) существует единственный $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$.

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 6. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y существует единственный $\vee_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$.

Можно построить доказательство леммы 7, аналогичное данному выше доказательству леммы 6.

Лемма 8. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y существует единственный $\supset_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$.

Можно построить доказательство леммы 8, аналогичное данному выше доказательству леммы 6.

Лемма 9. Для всякого $\langle m, n\rangle$-кортежа X существует единственный $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X.

Докажем лемму 9.

(1) X есть $\langle m, n\rangle$-кортеж (допущение).

Разумеется, что (2) множество $\{\langle 1, X(2)\rangle, \ldots, \langle n, X(n+1)\rangle, \langle n+1, 1\rangle\}$ и множество $\{\langle 1, X(2)\rangle, \ldots, , X(n+1)\rangle, \langle n+1, 0\rangle\}$ являются отображениями множества $\{1, \ldots, n, n{+}1\}$ в множество $\{0,1\}$.
Ясно, что (3)$X(n{+}1){=}0$ или $X(n{+}1){=}1$.

(4) $X(1){=}0$ (допущение).

Опираясь на утверждения (1), (2), (4) и на определение 15, получаем, что

(5) множество $\{\langle 1, X(2)\rangle, \ldots, \langle n, X(n + 1)\rangle, \langle n + 1, 1\rangle\}$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X.

(6) Существует $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X (из (5)).

Снимая допущение (4), получаем, что

(7) если $X(1){=}0$, то существует $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X.

(8) $X(1){=}1$ (допущение).

Опираясь на утверждения (1), (2), (4) и на определение 15, получаем, что

(9) множество $\{\langle 1, X(2)\rangle, \ldots, \langle n, X(n + 1)\rangle, \langle n + 1, 0\rangle\}$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X.

(10) Существует $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X (из (9)).

Снимая допущение (8), получаем, что

(11) если $X(1){=}1$, то существует $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X.

(12) Существует $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X (из (3), (7) и (11)).

(13) Z_1 и Z_2 являются $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарниками $\langle m,n\rangle$-кортежа X (допущение).

(14) $Z_1 \neq Z_2$ (допущение).

Опираясь на утверждения (13) и (14) и на определение 15, получаем, что

(15) существует такое i из $\{1,\ldots, n, n{+}1\}$, что Z_1(i)$\neq Z_2$(i).

Пусть (16) $i \in \{1,\ldots, n, n{+}1\}$, $Z_1(i)\neq Z_2(i)$.

(17) $i \in \{1,\ldots, n, n{+}1\}$ (из (16)).

(18) $Z_1(i)\neq Z_2(i)$ (из (16)).

(19) $i \in \{1,\ldots, n\}$ или $i = n{+}1$ (из (18)).

(20) $i \in \{1,\ldots, n\}$ (допущение).

(21) $Z_1(i)= X(i{+}1)$ и $Z_2(i)= X(i{+}1)$ (из (13) и (20), по определению 15).

(22) $Z_1(i)= Z_2(i)$ (из (21)).

Утверждение (22) противоречит утверждению (18). Следовательно, неверно допущение (20). Итак, (23) неверно, что $i \in\{1,\ldots, n\}$.

(24) $i = n{+}1$ (из (19) и (23)).

(25) $X(n{+}1)$=0 (допущение).

(26) $Z_1(n{+}1)$=1 и $Z_2(n{+}1)$=1 (из (13) и (25), по определению 15).

(27) $Z_1(i)$=1 и $Z_2(i)$=1 (из (24) и (26)).

(28) $Z_1(i)$=$Z_2(i)$ (из (27)).

Утверждение (28) противоречит утверждению (18). Следовательно, неверно допущение (25). Итак, (29) неверно, что $X(n + 1) = 0$.

(30) $X(n{+}1)$=1 (из (3) и (29)).

(31) $Z_1(n{+}1){=}0$ и $Z_2(n{+}1){=}0$ (из (13) и (30), по определению 15).

(32) $Z_1(i){=}0$ и $Z_2(i){=}0$ (из (24) и (31)).

(33) $Z_1(i){=}\ Z_2(i)$ (из (32)).

Утверждение (33) противоречит утверждению (18). Следовательно, неверно допущение (14). Итак, (34) $Z_1 = Z_2$.

Снимая допущение (13) и обобщая, получаем, что

(35) для всякого Z_1 и для всякого Z_2: если Z_1 и Z_2 являются $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарниками $\langle m,n\rangle$-кортежа X, то $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_2$.

Опираясь на утверждения (12) и (35), получаем, что

(36) существует единственный $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа X.

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 9. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. $\&_{\langle m,n\rangle}$ есть бинарная операция на $C_{\langle m,n\rangle}$.

Докажем лемму 10.

Согласно стандартному определению бинарной операции на заданном множестве, для доказательства леммы 10 достаточно доказать следующие утверждения (А), (Б) и (В)[2].

(А) $\&_{\langle m,n\rangle}$ включается в декартово произведение $C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$,

(Б) для всяких X и Y из $C_{\langle m,n\rangle}$ существует такой Z, что $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$,

(В) для всяких X, Y, Z_1 и Z_2: если $\langle \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z}_1\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$ и $\langle \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z}_2\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$, то $\mathrm{Z}_1{=}\mathrm{Z}_2$.

[2]Определение, о котором идет речь, гласит, что f есть бинарная операция на множестве M, если выполняются следующие условия (i), (ii) и (iii): (i) f включается в декартово произведение $M \times M \times M$, (ii) для всяких x и y из M существует такой z, что $\langle$ x, y, z $\rangle \in f$, (iii) для всяких x, y, z_1 и z_2: если $\langle$ x, y, z_1 $\rangle \in f$ и $\langle$ x, y, z_2 $\rangle \in f$, то $\mathrm{z}_1{=}\mathrm{z}_2$.

Докажем утверждение (A).

(1) $a \in \&_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (1) и соглашение 9, получаем, что

(2) a принадлежит множеству всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$.

(3) Существуют X, Y и Z, выполняющие условие: $a = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\rangle$, X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ (из (2)).

Пусть (4) $a = \langle X, Y, Z\rangle$, X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$.

(5) $a = \langle X, Y, Z\rangle$ (из (4)).

(6) X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами (из (4)).

(7) Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$ (из (4)).

(8) Z есть $\langle m, n\rangle$-кортеж (из (6) и (7), по лемме 2).

Опираясь на утверждения (6), (8) и замечание 4, получаем, что

(9) X, Y и $Z \in C_{\langle m,n\rangle}$.

В свете утверждения (9) ясно, что

(10) $\langle X, Y, Z\rangle \in C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$.

(11) $a \in C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$ (из (5) и (10)).

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что

(12) для всякого a: если a $\in \&_{\langle m,n\rangle}$, то a $\in C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$.

Опираясь на утверждение (12) и определение теоретико-множественного включения, получаем, что $\&_{\langle m,n\rangle}$ включается в $C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$.
Утверждение (А) доказано.

Докажем утверждение (Б).

(1) $X, Y \in C_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (1) и замечание 4, получаем, что

(2) X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами.

(3) Существует единственный $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$ (из (2), по лемме 6).

Пусть (4) Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$.
Разумеется, что (5) существует единственная упорядоченная тройка, первый член которой есть X, второй — Y, третий — Z.

В свете утверждений (2), (4), (5) и соглашения 9 ясно, что

(6) $\langle X, Y, Z\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$.

(7) Существует такой Z, что $\langle X, Y, \mathrm{Z}\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$ (из (6)).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (Б).

Утверждение (Б) доказано.

Докажем утверждение (В).

(1) $\langle X, Y, Z_1\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$ и $\langle X, Y, Z_2\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (1) и соглашение 9, получаем, что

(2) X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, Z_1 есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, Z_2 есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$.

Опираясь на утверждение (2) и используя лемму 6, получаем, что

(3) $Z_1 = Z_2$.

Снимая допущения (1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (В).

Утверждение (В) доказано.

Лемма 10 доказана.

Лемма 11. $\vee_{\langle m,n \rangle}$ есть бинарная операция на $C_{\langle m,n \rangle}$.

Используя лемму 3 и лемму 7, можно построить доказательство леммы 11, аналогичное данному выше доказательству леммы 10.

Лемма 12. $\supset_{\langle m,n \rangle}$ есть бинарная операция на $C_{\langle m,n \rangle}$.

Используя лемму 4 и лемму 8, можно построить доказательство леммы 12, аналогичное данному выше доказательству леммы 10.

Лемма 13. $\neg_{\langle m,n \rangle}$ есть унарная операция на $C_{\langle m,n \rangle}$.

Докажем лемму 13.

Согласно стандартному определению унарной операции на заданном множестве, для доказательства леммы 13 достаточно доказать следующие утверждения (А), (Б) и (В)[3].

(А) $\neg_{\langle m,n \rangle}$ включается в декартово произведение $C_{\langle m,n \rangle} \times C_{\langle m,n \rangle}$,

(Б) для всякого X из $C_{\langle m,n \rangle}$ существует такой Z, что $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Z} \rangle \in \neg_{\langle m,n \rangle}$,

(В) для всяких X, Z_1 и Z_2: если $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Z}_1 \rangle \in \neg_{\langle m,n \rangle}$ и $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Z}_2 \rangle \in \neg_{\langle m,n \rangle}$, то $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_2$.

Докажем утверждение (А).

(1) $a \in \neg_{\langle m,n \rangle}$ (допущение).

---

[3]Определение, о котором идет речь, гласит, что f есть унарная операция на множестве M, если выполняются следующие условия (i), (ii) и (iii): (i) f включается в декартово произведение $M \times M$, (ii) для всякого x из M существует такой z, что $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle \in f$, (iii) для всяких x, z_1 и z_2: если $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z}_1 \rangle \in f$ и $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z}_2 \rangle \in f$, то $\mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2$.

Опираясь на утверждение (1) и соглашение 12, получаем, что

(2) a принадлежит множеству всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle X, Z\rangle$, где X есть $\langle m, n\rangle$-кортеж, а Z есть $\langle m, n\rangle$-напарник $\neg_{\langle m,n\rangle}$-кортежа X.

(3) Существуют X и Z, выполняющие условие: $a = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Z}\rangle$, X есть $\langle m, n\rangle$-кортеж, а Z есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X (из (2)).

Пусть (4) $a = \langle X, Z\rangle$, X есть $\langle m, n\rangle$-кортеж, Z есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X.

(5) $a = \langle X, Z\rangle$ (из (4)).

(6) X есть $\langle m, n\rangle$-кортеж (из (4)).

(7) Z есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X (из (4)).

(8) Z есть $\langle m, n\rangle$-кортеж (из (6) и (7), по лемме 5).

Опираясь на утверждения (6), (8) и замечание 4, получаем, что

(9) $X, Z \in C_{\langle m,n\rangle}$.

В свете утверждения (9) ясно, что

(10) $\langle X, Z\rangle \in C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$.

(11) $a \in C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$ (из (5) и (10)).

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что

(12) для всякого а: если а $\in \neg_{\langle m,n\rangle}$, то а $\in C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$.

Опираясь на утверждение (12) и определение теоретико-множественного включения, получаем, что $\neg_{\langle m,n\rangle}$ включается в $C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$.

Утверждение (А) доказано.

Докажем утверждение (Б).

(1) $X \in C_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (1) и замечание 4, получаем, что

(2) X есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

(3) Существует единственный $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X (из (2), по лемме 9).

Пусть (4) Z есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X.
Разумеется, что (5) существует единственная упорядоченная пара, первый член которой есть X, второй $-Z$.
В свете утверждений (2), (4), (5) и соглашения 12 ясно, что

(6) $\langle X, Z\rangle \in \neg_{\langle m,n\rangle}$.

(7) Существует такой Z, что $\langle X, \mathrm{Z}\rangle \in \neg_{\langle m,n\rangle}$ (из (6)).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (Б).

Утверждение (Б) доказано.

Докажем утверждение (В).

(1) $\langle X, Z_1\rangle \in \neg_{\langle m,n\rangle}$ и $\langle X, Z_2\rangle \in \neg_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (1) и соглашение 12, получаем, что

(2) X есть $\langle m, n\rangle$-кортеж, Z_1 есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X, Z_2 есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X.

Опираясь на утверждение (2) и используя лемму 9, получаем, что

(3) $Z_1 = Z_2$.

Снимая допущения (1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (В).

Утверждение (В) доказано.

Лемма 13 доказана.

Разумеется, существует единственная упорядоченная четверка, первый член которой есть $\&_{\langle m,n\rangle}$, второй — $\vee_{\langle m,n\rangle}$, третий — $\supset_{\langle m,n\rangle}$, а четвертый — $\neg_{\langle m,n\rangle}$, и существует единственная упорядоченная тройка, первый член которой есть $C_{\langle m,n\rangle}$, второй — $D_{\langle m,n\rangle}$, а третий — $\langle \&_{\langle m,n\rangle}, \vee_{\langle m,n\rangle}, \supset_{\langle m,n\rangle}, \neg_{\langle m,n\rangle}\rangle$.

Замечание 7. В свете того, что множество $D_{\langle m,n\rangle}$ включается в множество $C_{\langle m,n\rangle}$, а $\&_{\langle m,n\rangle}, \vee_{\langle m,n\rangle}, \supset_{\langle m,n\rangle}$ и $\neg_{\langle m,n\rangle}$ — операции на множестве $C_{\langle m,n\rangle}$, ясно, что $\langle C_{\langle m,n\rangle}, D_{\langle m,n\rangle}, \langle \&_{\langle m,n\rangle}, \vee_{\langle m,n\rangle}, \supset_{\langle m,n\rangle}, \neg_{\langle m,n\rangle}\rangle\rangle$ является логической матрицей.

Соглашение 13. Логическую матрицу $\langle C_{\langle m,n\rangle}, D_{\langle m,n\rangle}, \langle \&_{\langle m,n\rangle}, \vee_{\langle m,n\rangle}, \supset_{\langle m,n\rangle}, \neg_{\langle m,n\rangle}\rangle\rangle$ обозначаем через $\mathfrak{M}(m,n)$ и называем $\langle m,n\rangle$-матрицей.

Соглашение 14. Результат применения операций $\bullet$ из $\{\&_{\langle m,n\rangle}, \vee_{\langle m,n\rangle}, \supset_{\langle m,n\rangle}\}$ к упорядоченной паре $\langle X, Y\rangle$ элементов множества $C_{\langle m,n\rangle}$ обозначаем через $(X \bullet Y)$, а результат применения операции $\neg_{\langle m,n\rangle}$ к элементу X множества $C_{\langle m,n\rangle}$ обозначаем через $\neg_{\langle m,n\rangle}(X)$.

Определение 16. Называем $\mathfrak{M}(m,n)$-оценкой (или оценкой в $\mathfrak{M}(m,n)$) отображение множество всех пропозициональных переменных языка L в $C_{\langle m,n\rangle}$.

Определение 17. Называем $\mathfrak{M}(m,n)$-означиванием при $\mathfrak{M}(m,n)$-оценке ρ такое отображение g множества всех L-формул в множество $C_{\langle m,n\rangle}$, что выполняются следующие условия:

(1) для всякой пропозициональной переменной q языка L $g(\mathrm{q}) = \rho(\mathrm{q})$;

(2) для всяких L-формул A и B:

$g((\mathrm{A}\&\mathrm{B})) = (g(\mathrm{A}) \&_{\langle m,n\rangle} g(\mathrm{B}))$,

$g((\mathrm{A}\vee\mathrm{B})) = (g(\mathrm{A}) \vee_{\langle m,n\rangle} g(\mathrm{B}))$,

$g((\mathrm{A}\supset\mathrm{B})) = (g(\mathrm{A}) \supset_{\langle m,n\rangle} g(\mathrm{B}))$,

$g((\neg\mathrm{A})) = \neg_{\langle m,n\rangle}(g(\mathrm{A}))$.

Замечание 8. Можно доказать, что для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ существует единственное $\mathfrak{M}(m,n)$-означивание при ρ.

Соглашение 14. Обозначаем через $|\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle}$ $\mathfrak{M}(m,n)$-означивание при $\mathfrak{M}(m,n)$-оценке ρ, а результат применения $|\ |_{\rho}^{\langle m,n\rangle}$ к L-формуле A обозначаем через $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle}$.

Определение 18. Называем A $\mathfrak{M}(m,n)$-общезначимой (или общезначимой в $\mathfrak{M}(m,n)$) L-формулой, если для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$.

Определение 19. Говорим, что A $\mathfrak{M}(m,n)$-следует из M (или из M $\mathfrak{M}(m,n)$-следует A), если выполняются три условия: (1) A есть L-формула, (2) M есть множество L-формул, (3) для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ верно, что если $|\mathrm{B}|_{\rho}{}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой L-формулы В из M, то $|A|_{\rho}{}^{\langle m,n\rangle}$.

Определение 20. Называем v-q-кортежем (где v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка, а q есть пропозициональная переменная языка L) такое отображение ϕ множества $\{1,\ldots, n, n{+}1\}$ на множество $\{v(\neg^{[0]}(q)),\ldots, v(\neg^{[n-1]}(q)), v(\neg^{[n]}(q))\}$, что для всякого i из $\{1,\ldots, n, n+1\}$ $\phi(\mathrm{i}) = v(\neg^{[\mathrm{i}-1]}(q))$.

Замечание 9. Понятно, что для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v и для всякой пропозициональной переменной q языка L существует единственный v-q-кортеж.

Соглашение 15. Условимся обозначать v-q-кортеж (где v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка, а q есть пропозициональная переменная языка L) через (v-q-cort).

Лемма 14. Для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v и для всякой пропозициональной переменной q языка L (v-q-cort) есть $\langle m,n\rangle$-кортеж.

Докажем лемму 14.

(1) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(2) q есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

(3) (v-q-cort) есть v-q-кортеж (из (1) и (2), по соглашению 15).

(4) (v-q-cort) есть отображение множества $\{1,\ldots, n, n{+}1\}$ в множество $\{v(\neg^{[0]}(q)),\ldots,\ v(\neg^{[n-1]}(q)),\ v(\neg^{[n]}(q))\}$ (из (3), по определению 20).

Разумеется, что (5)$\neg^{[0]}(q),\ldots,\ \neg^{[n-1]}(q),\ \neg^{[n]}(q)$ являются квазиэлементарными L-формулами, длина каждой из которых $\leq n$.

(6) v есть $I_{\langle m,n\rangle}$-предоценка (из (1), по определению 2).

(7) v есть отображение множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq n$, в множество $\{0{,}1\}$ (из (6), по определению 1).

(8) $v(\neg^{[0]}(q)){\in}\{0{,}1\},\ldots,\ v(\neg^{[n-1]}(q)){\in}\{0{,}1\},\ v(\neg^{[n]}(q)){\in}\{0{,}1\}$ (из (5) и (6)).

Опираясь на утверждение (8), получаем, что

(9) множество $\{v(\neg^{[0]}(q)),\ldots,\ v(\neg^{[n-1]}(q)),\ v(\neg^{[n]}(q))\}$ включается в множество $\{0{,}1\}$.

В свете утверждений (4) и (9) ясно, что

(10) (v-q-cort) есть отображение множества $\{1,\ldots, n, n{+}1\}$ в множество $\{0{,}1\}$.

(11) i есть целое число (допущение).

(12) $m{+}1{\leq}\ i < n{+}1$ и (v-q-cort)(i)=1 (допущение).

(13) $m{+}1{\leq}\ i < n{+}1$ (из (12)).

(14) (v-q-cort)(i)=1 (из (12)).

(15) (v-q-cort)(i)= $v(\neg^{[n-1]}(q))$ (из (1), (2), с использованием определения 20 и соглашения 15).

(16) $v(\neg^{[n-1]}(q))=1$ (из (14) и (15)).

(17) $m \leq i-1 < n$ (из (13).

Ясно, что (18) $h(\neg^{[i-1]}(q)) = i - 1$.

(19) $m \leq h(\neg^{[i-1]}(q)) < n$ (из (17) и 18)).

(20) $v((\neg\neg^{[i-1]}(q)))=0$ (из (1), (16) и (19), по определению 2).

Разумеется, что (21) $(\neg\neg^{[i-1]}(q))$ есть $\neg^{[i]}(q)$.

(22) $v(\neg^{[i]}(q))=0$ (из (20) и (21)).

Опираясь на утверждение (11) и (13), получаем, что

(23) $i+1 \in \{1, \ldots, n, n+1\}$.

(24) (v-q-cort)(i+1)=$v(\neg^{[i]}(q))$ (из (1) и (2), по определению 20 и по соглашению 15).

(25) (v-q-cort)(i+1)=0 (из (22) и (24)).

Снимая допущение (12), получаем, что

(26) если $m+1 \leq i < n+1$ и (v-q-cort)(i)=1, то (v-q-cort)(i+1)=0.

Снимая допущение (11) и обобщая, получаем, что

(27) для всякого целого числа i: если $m + 1 \leq \mathrm{i} < n + 1$ и (v-q-cort)(i)=1, то (v-q-cort)(i+1)=0.

(28) (v-q-cort) есть $\langle m, n\rangle$-кортеж (из (10) и (27), по определению 6).

Снимая допущения (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 14.
Лемма 14 доказана.

Продолжение статьи планируется к публикации в следующем номере «Логических исследований».

Литература

[1] *Попов В. М.* Секвенциальная аксиоматизация и семантика I-логик васильевского типа // Логические исследования 2016. Т. 22. № 1. С. 33–69.

Popov V.M

To the Problem of Characterization of Logic of the Vasiliev Type: on Tabularity $I_{\langle x,y\rangle}(x, y \in$ {0, 1, 2,...} and $x < y$). Part I

Popov Vladimir Mikhailovich
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University
Lomonosovsky prospect, 27–4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: pphiloslog@mail.ru

In this article, continuing the work carried out in [1], the problem of tabularity of the I-logics of the Vasiliev type (propositional logic is called tabular if it has a finite characteristic matrix). The main result obtained in this article: for any non-negative integers x and y, the first of which is less than the second, the logic $I_{\langle \mathrm{x,y}\rangle}$ is tabular (the class of all such logics is an infinite subclass of the class of all I-logics of the Vasiliev type). The proposed study is based on the use of the results obtained in [1], and on the use of the authors' "cortege semantics". To achieve the above main result, we show how on arbitrary nonnegative integer numbers m and n, satisfying the inequality $m < n$, is constructed logic matrix $\mathfrak{M}(m, n)$, which is the finite characteristic matrix of logic $I_{\langle m,n\rangle}$. Since the carrier of the logical matrix $\mathfrak{M}(m, n)$ is some set of 0-1-corteges, the semantics based on this logical matrix is naturally called the cortege semantics. Important note: the article is published in two parts. Before you the first part of the article, the second part of the article is planned to be published in the second issue of "Logical Investigations" for 2017.

Keywords: I-logic $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ and $m < n)$, the two-valued semantics of the I-logic $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ and $m < n)$, the cortege semantics of the I-logic $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ and $m < n)$

References

[1] Popov, V.M. "Sekventsial'naya aksiomatizatsiya i semantika I-logik vasil'evskogo tipa" [Sequential axiomatization and semantics I-logic of the Vasiliev type], *Logicheskie issledovaniya* [Logical research], 2016, Vol. 22, No. 1, pp. 33–69. (In Russian)

Логические исследования
2017. Т. 23. № 1. С. 83–104
УДК 510.662

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 1, pp. 83–104
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-1-83-104

V.O. Shangin

A Precise Definition of an Inference (by the Example of Natural Deduction Systems for Logics $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$)[1]

Shangin Vasilyi Olegovich
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University.
Lomonosovsky prospect, 27–4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: shangin@philos.msu.ru

In the paper, we reconsider a precise definition of a natural deduction inference given by V. Smirnov. In refining the definition, we argue that all the other *indirect* rules of inference in a system can be considered as special cases of the implication introduction rule in a sense that if one of those rules can be applied then the implication introduction rule can be applied, either, but not vice versa. As an example, we use logics $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}, \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, \dots \omega\}$, such that $I_{\langle 0,0\rangle}$ is propositional classical logic, presented by V. Popov. He uses these logics, in particular, a Hilbert-style calculus $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}, \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, \dots \omega\}$, for each logic in question, in order to construct examples of effects of Glivenko theorem's generalization. Here we, first, propose a subordinated natural deduction system $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}, \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, \dots \omega\}$, for each logic in question, with a precise definition of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference. Moreover, we, comparatively, analyze precise and traditional definitions. Second, we prove that, for each $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, \dots \omega\}$, a Hilbert-style calculus $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ and a natural deduction system $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ are equipollent, that is, a formula A is provable in $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ iff A is provable in $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Keywords: precise definition of inference, indirect rule, implication introduction rule, natural deduction, quasi-elemental formula, subordinated sequence

Introduction

In [10], V. Popov presents logics $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ and Hilbert-style calculi $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}, \alpha, \beta \in 0, 1, 2, 3, \dots \omega$, for these logics, such that $I_{\langle 0,0\rangle}$ is propositional classical logic. He uses them in order to construct examples

[1]The author is supported by Russian Foundation for Humanities, grant 16-03-00749 "Logical-epistemic problems of knowledge representation".

of effects of a generalization of Glivenko theorem. So, the purpose of the present paper is to present, within the framework of [8, 9], a subordinated natural deduction (abbreviated passim as 'ND') calculus $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, for each logic in question, with the precise definition of an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference, following the works of V. Smirnov [12, 14]. We, also, show the equipollentness between a Hilbert-style calculus $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ and a ND system $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, for each $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, \dots \omega\}$, that is, a formula A is provable in $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ iff A is provable in $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Following [10], we fix a standard propositional language L over an alphabet $\{p, p_1, p_2, \dots, (,), \&, \vee, \supset, \neg\}$. A notion of a formula of language L is defined as usual. (Passim by 'a formula' we mean 'a formula of language L'.) A formula is said to be *quasi-elemental* iff no logical connective $\&, \vee, \supset$ occurs in it ([10]). A length of a formula A is said to be the number of all occurrences of the logical connectives in L in A. Letters A, B, C, D, E with lower indexes run over arbitrary formulae. Letters Γ, Δ with upper and lower indexes run over arbitrary finite sets of formulae. Letters α and β run over $\{0, 1, 2, 3, \dots \omega\}$ passim.

In [10], V. Popov presents a Hilbert-style calculus $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. The language of the calculus is the language L mentioned above. We follow (and, for more details, refer the reader to) [10] in describing a Hilbert-style calculus $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. A formula is an axiom of $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ iff it is one of the following forms: (I) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$, (II) $A \supset (A \vee B)$, (III) $B \supset (A \vee B)$, (IV) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$, (V) $(A\&B) \supset A$, (VI) $(A\&B) \supset B$, (VII) $(C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A\&B)))$, (VIII) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A\&B) \supset C)$, (IX) $((A\&B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$, (X) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$, (XI,$\alpha$) $\neg D \supset (D \supset A)$, where D is a formula which is not a quasi-elemental formula of a length less than α, (XII,β) $(E \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg E$, where E is a formula which is not a quasi-elemental formula of a length less than β. *Modus ponens* is the only inference rule of the calculus.

Definitions of an inference in $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ (abbreviated as $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference) and a proof in $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ are given in the standard way for a Hilbert-style calculus. Notions of the length of an inference and the length of a proof as well as the notion of a theorem are defined as usual.

In [10], the following fact is particularly highlighted: $I_{\langle 0,0\rangle}$ is propositional classical logic, where $I_{\langle 0,0\rangle}$ is the set of formulae provable in $HI_{\langle 0,0\rangle}$. This fact implies both schemata A ⊃ (B ⊃ A) and $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ are theorems of $HI_{\langle 0,0\rangle}$ and, therefore, of each Hilbert-style calculus $HI_{\langle \alpha,\beta\rangle}, \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, \ldots \omega\}$. So, we, non-constructively, point out the standard deduction theorem holds for each calculus in question.

The paper is organized as follows. Section 1 presents a ND system $NI_{\langle \alpha,\beta\rangle}$ with both precise and traditional definitions of an $NI_{\langle \alpha,\beta\rangle}$-inference. In Section 2, the Hilbert-style calculus $NI_{\langle \alpha,\beta\rangle}$ and the ND system $NI_{\langle \alpha,\beta\rangle}$ are shown to be equipollent. The final section concludes the work and outlines the future research.

1. ND systems $NI_{\langle \alpha,\beta\rangle}$

Let us set up a subordinated ND system $NI_{\langle \alpha,\beta\rangle}$ and give a precise definition of a $NI_{\langle \alpha,\beta\rangle}$-inference. The language of the system is, again, the language L mentioned above. There are two kinds of rules in the system. Here is the list of the rules of the first kind (sometimes called *direct*). The rules of the second kind (sometimes called *indirect*) are defined *with* the precise definition of an inference below.

$$\frac{A\&B}{A}\&_{el1} \qquad \frac{A\&B}{B}\&_{el2} \qquad \frac{A, B}{A\&B}\&_{in}$$

$$\frac{A}{A \vee B}\vee_{in1} \qquad \frac{B}{A \vee B}\vee_{in1} \qquad \frac{A \supset B, A}{B} \supset_{el}$$

$\dfrac{D, \neg D}{A}\neg_{in1(\alpha)}$, where D is a formula which is not a quasi-elemental formula of a length less than α.

The necessity of a precise definition of $NI_{\langle \alpha,\beta\rangle}$-inference is illustrated with V. Smirnov's thesis: "... By natural deduction systems we shall refer to logistic systems with a special notion of an inference. *In these systems, an inference is more complex object than just a sequence of formulae or a tree-like of formulae.* Due to this property of natural deduction systems, a definite object entitled a formal inference corresponds to both direct and indirect ways of argument" [12, p. 96, both the translation and the *italics* are ours].

In defining both a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference и its length, we, with modifications, follow V. Smirnov [12, p. 116–118], [14, p. 245]. Letters η и ι with indexes denote $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inferences, a letter γ with indexes denotes *parts* of $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inferences, and a letter h denotes the length of an inference.[2]

An precise definition of $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-*inference* and a definition a height of $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference

1. A is an inference ι of A from a set of premises $\{A\}$, and $h(\iota) = 1$.

2. If η is an inference from Γ and A is a formula, then $\begin{smallmatrix}\eta\\ A\end{smallmatrix}$ is an inference ι of A from $\{A\} \cup \Gamma$, and $h(\iota) = h(\eta) + 1$.

3. If η is an inference from Γ, η contains $A_1, \ldots, A_k$ $(k = 1, 2)$ and B is inferred from $A_1, \ldots, A_k$ via one of the rules $\&_{el1}$, $\&_{el2}$, $\&_{in}$, $\vee_{in1}$, $\vee_{in2}$, $\supset_{el}$ and $\neg_{in1(\alpha)}$, then $\begin{smallmatrix}\eta\\ B\end{smallmatrix}$ is an inference ι of B from Γ, and $h(\iota) = h(\eta) + 1$.

4. If η is an inference of B from $\{A\} \cup \Gamma$ and η is $\begin{smallmatrix}\gamma\\ \gamma_1\end{smallmatrix}$, where γ_1 is a part of η, starting from the last premise A in η until B itself,[3] then $\begin{smallmatrix}\gamma\\ |\gamma_1\\ A\supset B\end{smallmatrix}$ is an inference ι of $A \supset B$ from Γ, and $h(\iota) = h(\eta) + 1$.

5. If η is an inference of B from $\{A\} \cup \Gamma$ and η is $\begin{smallmatrix}\gamma\\ \gamma_1\end{smallmatrix}$, where B is C, A is C $\supset D$, γ_1 is a part of η, starting from the last premise $C \supset D$ in η until C itself, then $\begin{smallmatrix}\gamma\\ |\gamma_1\\ C\end{smallmatrix}$ is an inference ι of C from Γ, and $h(\iota) = h(\eta) + 1$.

6. If η is an inference of B from $\{A\} \cup \Gamma$ and η is $\begin{smallmatrix}\gamma\\ \gamma_1\end{smallmatrix}$, where B is $\neg(A \supset A)$, A is E, where E is a formula which is not a quasi-elemental formula of a length less than β and γ_1 is a part of η,

[2]In every case, the precise definition specifies which part of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference is under consideration. The reason we introduce a special letter to run over parts of inference is that, in general, as we will see, a part of an inference is not an inference.

[3]It is the last occurrence of B in η that is under consideration. In what follows, we will omit this specification everywhere, except clause 7.

starting from the last premise E in η until $\neg(A \supset A)$ itself, then $\begin{matrix}\gamma\\ |\gamma_1\\ \neg E\end{matrix}$ is an inference ι of $\neg E$ from Γ, and $h(\iota) = h(\eta) + 1$.

7. If η is an inference of B from $\{D_1\} \cup \{D_2\} \cup \Gamma$ and η is $\begin{matrix}\gamma\\ \gamma_1\\ \gamma_2\end{matrix}$, where B is C and γ contains $D_1 \vee D_2$, γ_1 is a part of η, starting from the last premise D_1 in η until C, γ_2 is a part of η, is a part of η, starting from the last premise D_2 in η until C *itself*, then $\begin{matrix}\gamma\\ |\gamma_1\\ |\gamma_2\\ C\end{matrix}$ is an inference ι of C from Γ, and $h(\iota) = h(\eta) + 1$.[4]

The *core of modifications* is as follows. An essential modification deals with V. Smirnov's suggestion that *any discarded* part of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference. (A discarded part of an inference is marked with a horizontal line from the left.) This is not the case if a part of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference contains a formula that is not a premise and is inferred from the formulae which this part of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference does not contain. For example, in the clause 4, a part γ_1 may contain a formula that is inferred from some formula contained in a part γ (and γ may be an inference, itself). So, γ_1 is not an inference while $\begin{matrix}\gamma\\ \gamma_1\end{matrix}$ is. Sometimes, V. Smirnov applies a notion of an *auxiliary inference* (or a *subderivation*) to such sequences of formulae as γ_1. The name of this notion obviously reflects the idea that such an inference plays a secondary role, and can be considered only with respect to the 'key' inference. However, we can't find it satisfactory that an auxiliary inference is shown not to be a kind of an inference. At last, minor modifications deal with evaluating a height of $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference in $\supset_{el}$ and $\vee_{el}$ rules as well as with evaluating the height of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference that now cannot be equal to 0.

Clause 4 (5, 6, and 7, respectfully) of the above definition is a formulation of an *indirect* rule of $\supset_{in}(\supset_P, \neg_{in2(\beta)}$, and $\vee_{el}$, respectfully). We pay attention (and exemplify it below) to the fact that clauses 5-7 are special cases of clause 4. (In case of clause 7, the situation is a little bit

[4]Clause 7 may have alternative formulations: 1. γ_3 occurs between γ_1 and γ_2; 2. γ_1 reorders with γ_2; 3. $D_1 \vee D_2$ occurs below a part γ_1 etc. This analysis goes beyond the scope of the paper.

more complex than in the other cases because it allows simultaneously discarding two parts of an inference, not one part. It is the reason why we choose clause 7 in the example below.) By the fact that a rule, say, $\supset_P$, is a special case of a rule $\supset_{in}$ we mean that if one can apply $\supset_p$ in the inference then one can apply $\supset_{in}$, either, but not vice versa. To be sure, we don't mean $\supset_p$ is derivable via $\supset_{in}$.

There different notation formats for a subordinated inference in ND systems [12, p. 119–126]. We will use so called Jaskowski-Quine notation in [2].[5]

Let us consider the following sequence of formulae:

1. $A \supset C$ — premise.
2. $B \supset C$ — premise.
3. $A \vee B$ — premise.
4. A — premise.
5. C — $\supset_{el}$: 1, 4
6. B — premise.
7. C — $\supset_{el}$: 2, 6

In accordance to clause 4, we have an inference of C from premises $A \supset C$, $B \supset C$, $A \vee B$, A, and B. Thus, we are legitimate to proceed with an inference of $B \supset C$ from premises $A \supset C$, $B \supset C$, $A \vee B$, and A:

1. $A \supset C$ — premise.
2. $B \supset C$ — premise.
3. $A \vee B$ — premise.
4. A — premise.
5. C — $\supset_{el}$: 1, 4

|6. B — premise.
|7. C — $\supset_{el}$: 2, 6

8. $B \supset C$ — $\supset_{in}$: 7

[5] In the literature, a subordinated inference is sometimes called a *linear-type* ND or a *Fitch-style* ND [11]. A subordinated inference differs from a tree-like inference presented by G. Gentzen [5], where, roughly, no formula is used more than once in the inference as a premise.

On the other hand, in accordance to clause 7, an inference of C from premises $A \supset C$, $B \supset C$, $A \vee B$, A, and B contains a part, starting from the last premise A until C (steps 4–5), and a part, starting from the last premise B until C (steps 6–7), as well as it contains A$\vee$B which contains in no parts mentioned above. Thus, we are legitimate to proceed with an inference of C from premises $A \supset C$, $B \supset C$, and $A \vee B$:

1. $A \supset C$ — premise.
2. $B \supset C$ — premise.
3. $A \vee B$ — premise.
|4. A — premise.
|5. C — $\supset_{el}$: 1, 4
|6. B — premise.
|7. C — $\supset_{el}$: 2, 6
8. C — $\vee_{in}$: 7

As a result, we see the complexity of a notion of an inference in ND systems leads to the fact that *a sequence of formulae turns out to be different inferences of the same formula from different set of premises.* Discussing this fact (which is impossible for the other conventional proof systems like Hilbert-style calculus, sequent-style calculus and tree-like ND system) and its consequences is not a topic of the paper. We are fully aware, however, that the fact that a *precise definition of an inference leads to some ambivalence* seems to be absurd. But we strongly believe that the reason of this fact is caused by the nature of indirect argument, itself, which have been being under suspicion in the development of logic.[6]

On the other hand, the difference between direct and indirect rules has become more evident. A direct rule is applicable provided an inference contains formula (formulae) which is (are) *above the line* in a formulation of this some rule. One can apply a direct rule to any formula; it is not necessary for the formula to be the last one in this inference. For example, in applying $\&_{el1}$ or some other direct rule, A&B (the one

[6]It is well-known that intuitionists have been criticizing the general version of *reductio ad absurdum*, a type of indirect argument.

that is above the line) is not necessary the last formula of the inference, i.e., it is not necessary that this inference is an inference of A&B from (possibly, empty) Γ.

The situation is not the same in case of indirect rules. An indirect rule is applicable, too, provided there is an inference of the formula which is above the line in the formulation of this rule. The crucial difference is that it applies to the last formula in an inference only. (Note, at any moment, there is only one formula that is the last one in an inference.) For example, in applying $\supset_{in}$, a formula B (the one that is above the line) is, necessarily, the last one in an inference, i.e., it is a must that there is an inference of B from a non-empty set of premises Γ, where A is a member of Γ. In the example above, we see that one has different options in applying indirect rules in the same way one has different options in applying direct rules. However, *it is impossible for a sequence of formulae to be an inference of two formulae*: such a possibility is allowed by so called traditional formulation of some indirect rules (in the next subsection it holds for the traditional formulation of $\vee_{el}$). Sometimes negation introduction rule is formulated, roughly, as follows: if there is an inference of both formulae A and $\neg A$ from the last premise C then there is an inference of a formula $\neg C$ [1, p. 140], or 'to be applied, an indirect rule $\neg_{in}$ requires two auxiliary inferences $\Gamma, A \vdash B$ and $\Gamma, A \vdash \neg B$' [13, p. 66]. In general, one can't determine another inference (so called 'auxiliary inference') 'inside' a given inference. Let us, again, say that discussing it goes beyond the scope of this paper.

In the end of this section, let us present so called the *traditional* formulations of both indirect rules and of an inference.[7] In the rules below, a formula A ($A \supset B$ or E) is the *last* premise. In $\neg_{in2(\beta)}$, a formula E is, additionally, a formula which is not a quasi-elemental formula of a length less than β. In this subsection, by 'inference' we mean '$NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference'.

[7]For the sake of simplicity and without loss of generality, we don't present a traditional formulation of $\vee_{el}$ and refer the reader to, for example, [6]. Note, sometimes, the traditional formulation of the indirect rules includes the derivability symbol '$\vdash$' [1].

$$\frac{[A]B}{A \supset B} \supset_{in} \qquad \frac{[A \supset B]A}{A} \supset_{p} \qquad \frac{[E]\neg(B \supset B)}{\neg E} \neg_{in2(\beta)}$$

An inference is said to be a non-empty finite linearly ordered sequence of formulae C_1, C_2,..., C_k, satisfying the following conditions:[8]

- Each C_i is either a premise or is inferred from the previous formulae via a rule;
- In applying $\supset_{in}$, each formula, starting from the last premise A until $A \supset B$, the result of this application, exclusively, is discarded from an inference;
- In applying $\supset_P$, each formula, starting from the last premise $A \supset B$ until A, the result of this application, exclusively, is discarded from an inference;
- In applying $\neg_{in2(\beta)}$, each formula, starting from the last premise E until $\neg E$, the result of this application, exclusively, is discarded from an inference.

Given an inference $C_1, C_2, \ldots, C_k$ with $A_1, A_2, \ldots, A_n$ being non-discarded premises and with the last formula C_k being graphically identical to B, we say this is an inference of B from premises $A_1, A_2, \ldots, A_n$. If a set of formulae Γ contains $A_1, A_2, \ldots, A_n$ and there is an inference of B from premises $A_1, A_2, \ldots, A_n$ then we say there is an inference of B from a set of formulae Γ [2, p. 129–130].

2. Metatheory of a ND system

We proof the following

THEOREM 1. $\Gamma \vdash_{HI\langle\alpha,\beta\rangle} A \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{NI\langle\alpha,\beta\rangle} A$, *for each* $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, \ldots \omega\}$.

[8] Here is (of course, incomplete) a list of (text)books reproducing the traditional formulation one way or another: [1]–[4], [6], [15], [16]. On the other hand, we are fully aware that textbooks' authors are, mostly, driven by pedagogy trying to 'not go deep into theoretical subtleties of all kinds' and following the principle 'to tell the truth and only the truth, but not all the truth' [2, p. 11, 12].

Proof $\Rightarrow$. Proof is by the method of complete induction on a height s of an arbitrary $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ.[9]

The scheme of complete induction is as follows: $(P(1)\&\forall x(\forall y((y < x) \supset P(y)) \supset P(x))) \supset \forall x P(x)$.

Let $P(s)$ denote a sentence "if there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height s of A from Γ then there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ".

Then the scheme looks as follows: ((if there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height 1 of A from Γ then there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ) $\&\forall s(\forall t((t < s) \supset$ (if there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height t of A from Γ then there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ)) $\supset$ (if there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height s of A from Γ then there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ))) $\supset \forall s$(if there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height s of A from Γ then there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ).

The *base case* is trivial according to the definitions of inferences in both $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ and $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

We prove the *inductive step*: $\forall s(\forall t((t < s) \supset$ (if there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height t of A from Γ then there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ)) $\supset$ (if there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height s of A from Γ then there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ)).

For modus ponens is an inference rule in both $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ and $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, it is enough to show that every $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-axiom is provable in $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. We confine ourselves to proving two specific $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-axioms: axiom (XI,$\alpha$) $\neg D \supset (D \supset A)$, where D is a formula which is not a quasi-elemental formula of a length less than α, and axiom (XII,β) $(E \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg E$, where E is a formula which is not a quasi-elemental formula of a length less than β.

$\vdash_{NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} \neg D \supset (D \supset A)$

$|1. \neg D$ — premise

$||2.\ D$ — premise

$||3.\ A$ —$_{in1(\alpha)}$: 1, 2

$|4.\ D \supset A$ — $\supset_{in}$: 3

$5. \neg D \supset (D \supset A)$ — $\supset_{in}$: 4

[9] We recall the standard definition of a length of an inference in a Hilbert-style calculus.

$\vdash_{NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (E \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg E$
$|1.\ E \supset \neg(A \supset A)$ — premise
$||2.\ E$ — premise
$||3. \neg(A \supset A)$ — $\supset_{el}$: 1, 2
$|4.\ -_{in2(\beta)}$: 3
5. $(E \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg E$ — $\supset_{in}$: 4

Proof $\Leftarrow$. Proof is by the method of complete induction on a height n of an arbitrary $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ.

The scheme of complete induction is as follows: $(Q(1)\&\forall x(\forall y((y < x) \supset Q(y)) \supset Q(x))) \supset \forall x Q(x)$.

Let $Q(n)$ denote a sentence "if there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height n of A from Γ then there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ".

Then the scheme looks as follows: ((if there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height 1 of A from Γ then there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ) $\&\forall n(\forall q((q < n) \supset$ (if there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height q of A from Γ then there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ)) $\supset$ (if there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height n of A from Γ then there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ)))$\supset \forall n(ifthereisaNI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height n of A from Γ then there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ).

The *base case*: $\mathrm{h}(\eta) = 1$. According to clause 1 of the definition of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference, a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference η of a height 1 of A from a set of premises Γ looks as follows: A is an inference from $\{A\}$:

1. A — premise.

This inference corresponds to the following $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from a set of premises $\{A\}$:

1. A — premise.

We prove the *inductive step*: $\forall n(\forall q((q < n) \supset$ (if there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height q of A from Γ then there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ))$\supset$(if there is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a height n of A from Γ then there is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ)). According to clauses 2–7 of the definition of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference, a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference η of a height n of A from a set of premises Γ looks as one of the six following cases:

Case 1 (2^{nd} clause of the definition of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference): $\frac{\eta'}{A'}$, where η' is an inference from a set of premises Γ' and Γ is $\{A\} \cup \Gamma'$.

Γ'

$\ldots$

n. A — premise.

For $h(\eta') < h(\eta)$,[10] one can, by the inductive hypothesis, build up a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference from a set of premises Γ'. Then a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from a set of premises Γ looks as follows:

Γ'

$\ldots$

n'. A — premise.

Case 2 (3^{rd} clause of the definition of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference): $\frac{\eta'}{A'}$, where η' is an inference of C from a set of premises Γ', η' contains $A_1, \ldots, A_k$; A is inferred from $A_1, \ldots, A_k$ via one of the rules $\&_{el1}, \&_{el2}, \&_{in}, \vee_{in1}, \vee_{in2}, \supset_{el}$, and $\neg_{in1(\alpha)}$.

Subcase 2.1.: η' contains $\neg D$ and D; A is inferred from $\neg D$ and D via $\neg_{in1(\alpha)}$, where $j < n-1$ and $m < n-1$.

Γ

$\ldots$

$j.\neg D$

$\ldots$

m. D

$\ldots$

$n-1$. C

n. A —$\neg_{in1(\alpha)}$: j, m

Let η' be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of C from Γ, η'_1 be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of D from Γ, and η'_2 be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of D from Γ, where $h(\eta'_1) < h(\eta')$ and $h(\eta'_2) < h(\eta')$, by the definition. The fact that h(η')<h(η), implies that $h(\eta'_1) < h(\eta)$ and $h(\eta'_2) < (\eta)$, and, by the inductive hypothesis, one can build up the following $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inferences:

[10] By the definition, $h(\frac{\eta'}{A}) = h(\eta') + 1$.

a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of D from Γ, a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of D from Γ, and a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of C from Γ. Then a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from a set of premises Γ looks as follows:

Γ
$\ldots$
$j'.\neg D$
$\ldots$
$m'.\ D$
$\ldots$
$n'-1.\ C$
$n'.\neg D \supset (D \supset A)$ — $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-axiom (XI,$\alpha$)
n'+1. A — modus ponens: j', m', n' (two times)

Subcase 2.2.:η' contains $A\&B$; A is inferred from $A\&B$ via $\&_{el1}$, where $m < n-1$.

Γ
$\ldots$
$m.\ A\&B$
$\ldots$
$n-1.\ C$
$n.\ A$ — $\&_{el1} : m$

Let η' be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of C from Γ and η'_1 be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of $A\&B$ from Γ, where $h(\eta'_1) < h(\eta')$, by the definition. The fact that $h(\eta') < h(\eta)$, implies that $h(\eta'_1) < h(\eta)$ and, by the inductive hypothesis, one can build up the following $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inferences: a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of $A\&B$ from Γ, a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of C from Γ. Then a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from a set of premises Γ looks as follows:

Γ
$\ldots$
$m'.\ A\&B$
$\ldots$
$n'-1.\ C$
$n'.\ (A\&B) \supset A$ — HI$_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-axiom (V)

$n'+1$. A — modus ponens: m', n'

Subcase 2.3., where η' contains $B\&A$; A is inferred from $B\&A$ via $\&_{el2}$, is treated analogously to subcase 2.2.

Subcase 2.4.: η' contains B and D; A is $B\&D$ and is inferred from B and D via $\&_{in}$, where $f < m$, $j < n-1$, and $m < n-1$.

Γ'
...
j. B
...
m. D
...
$n-1$. C
n. $B\&D$ — $\&_{in}$: j, m

Let η' be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of C from Γ, $\eta'1$ be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of B from Γ, and $\eta'2$ be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of D from Γ, where $h(\eta'_1) < h(\eta')$ and $h(\eta'_2) < h(\eta')$, by the definition. The fact that $h(\eta') < h(\eta)$, implies that $h(\eta'_1) < h(\eta)$ and $h(\eta'_2) < h(\eta)$, and, by the inductive hypothesis, one can build up the following $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inferences: a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of B from Γ, a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of D from Γ, and a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of C from Γ. Then a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of $B\&D$ from Γ looks as follows:

Γ
...
f'. A_1 — any $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-axiom
$f'+1$. $B \supset (A_1 \supset B)$ — $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-theorem
$f'+2$. $D \supset (A_1 \supset D)$ — $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-theorem
...
j'. B
$j'+1$. $A_1 \supset B$ — modus ponens: $f'+1, j'$
...
m'. D
$m'+1$. $A_1 \supset D$ — modus ponens: $f'+2, m'$

...
$n' - 1$. C
n'. $(A_1 \supset B) \supset ((A_1 \supset D) \supset (A_1 \supset (B\&D)))$ — $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-axiom (VII)
$n' + 1$. $B\&D$ — modus ponens: $j + 1'$, $m + 1'$, f', n' (three times)

Subcase 2.5.: η' contains B; A is $B \vee D$ and is inferred from B via $\vee_{in1}$, where m $< n - 1$.

Γ
...
m. B
...
$n - 1$. C
n. $B \vee D$ — $\vee_{in1}$: m

Let η' be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of C from Γ and η'_1 be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of B from Γ, where $h(\eta'_1) < h(\eta')$, by the definition. The fact that $h(\eta') < h(\eta)$, implies that $h(\eta'_1) < h(\eta)$ and, by the inductive hypothesis, one can build up the following $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inferences: a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of B from Γ, a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of C from Γ. Then a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of $B \vee D$ from a set of premises Γ looks as follows:

Γ
...
m'. B
...
$n' - 1$. C
n'. $B \supset (B \vee D)$ — $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-axiom (II)
$n' + 1$. $B \vee D$ — modus ponens: m', n'

Subcase 2.6., where η' contains D; A is $B \vee D$ and is inferred from D via $\vee_{in2}$, is treated analogously to subcase 2.5.

Subcase 2.7.: η' contains $B \supset A$ and B; A is inferred from $B \supset A$ and B via $\supset_{el}$, where $j < n - 1$, and $m < n - 1$.

Γ
$\dots$
$j.\ B \supset A$
$\dots$
$m.\ B$
$\dots$
$n-1.\ C$
$n.\ A$ — $\supset_{el}$: j, m

Let η' be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of C from Γ, η'_1 be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of $B \supset A$ from Γ, and η'_2 be an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of B from Γ, where $h(\eta'_1) < h(\eta')$ and $h(\eta'_2) < h(\eta')$, by the definition. The fact that $h(\eta') < h(\eta)$, implies that $h(\eta'_1) < h(\eta)$ and $h(\eta'_2) < h(\eta)$, and, by the inductive hypothesis, one can build up the following $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inferences: a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of $B \supset A$ from Γ, a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of B from Γ, and a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of C from Γ. Then a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ looks as follows:

Γ
$\dots$
$j'.\ B \supset A$
$\dots$
$m'.\ B$
$\dots$
$n'-1.\ C$
$n'.\ A$ — modus ponens: j', m'

Case 3 (4^{th} clause of the definition of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference). A is $B \supset C$ and a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference η of a height n of $B \supset C$ from Γ looks as follows: $\genfrac{}{}{0pt}{}{\gamma}{\genfrac{}{}{0pt}{}{|\gamma_1}{B \supset C}}$, where $\genfrac{}{}{0pt}{}{\gamma}{\gamma_1}$ is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference ι of C from $\{B\} \cup \Gamma$, γ_1 is a part of ι, starting from the last premise B in ι until C, itself, and $m < n-1$.

Γ
$\dots$
$|m.\ B$ — premise

$|\dots$
$|n-1.\ C$
$n.\ B \supset C - \supset_{in}\colon n-1$

For $h(\iota) < h(\eta)$, one can, by the inductive hypothesis,[11] build up a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of C from $\{B\} \supset \Gamma$. Then a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of $B \supset C$ from Γ looks as follows:

Γ
$\dots$
$m'.\ B$ — premise
$\dots$
$n'-1.\ C$
$n'.\ B \supset C$ — deduction theorem: $m', n'-1$

Case 4 (5^{th} clause of the definition of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference). A $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference η of a height n of A from Γ looks as follows: $\begin{matrix}\gamma\\ |\gamma_1\\ A\end{matrix}$, where $\begin{matrix}\gamma\\ \gamma_1\end{matrix}$ is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference ι of A from $\{A \supset B\} \cup \Gamma$, γ_1 is a part of ι, starting from the last premise $A \supset B$ in ι until A, itself, and m $< n-1$.

Γ
$\dots$
$|m.\ A \supset B$ — premise
$|\dots$
$|n-1.\ A$
$n.\ A - \supset_P\colon n-1$

For $h(\iota) < h(\eta)$, one can, by the inductive hypothesis, build up a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from $\{A \supset B\} \cup \Gamma$. Then a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ looks as follows:

Γ
$\dots$
$m'.\ A \supset B$ — premise

[11] Here and in the cases below, we stress the fact that we proceed from one inference to another inference, not from a *part* of an inference to another inference. So, the inductive hypothesis of the theorem is applicable.

$\ldots$
$n' - 1.\ A$
$n'.\ (A \supset B) \supset A$ — deduction theorem: $m', n' - 1$
$n' + 1.\ ((A \supset B) \supset A) \supset A$ — $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-axiom (X)
$n' + 2.\ A$ — modus ponens: $n', n' + 1$

Case 5 (6^{th} clause of the definition of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference). A is $\neg E$, where E is a formula which is not a quasi-elemental formula of a length less than β, and a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference η of a height n of $\neg E$ from Γ looks as follows: $\begin{smallmatrix}\gamma\\ |\gamma_1\\ \neg E\end{smallmatrix}$, where $\begin{smallmatrix}\gamma\\ \gamma_1\end{smallmatrix}$ is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference ι of $\neg(A \supset A)$ from $\{E\} \cup \Gamma$, γ_1 is a part of ι, starting from the last premise E in ι until $\neg(A \supset A)$, itself, and $m < n - 1$.

Γ
$\ldots$
$|m.\ E$ — premise
$|\ldots$
$|n - 1.\ \neg(A \supset A)$
$n. \neg E$ — $\neg_{in2(\beta)} : n - 1$

For $h(\iota) < h(\eta)$, one can, by the inductive hypothesis, build up a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of $\neg(A \supset A)$ from $\{E\} \cup \Gamma$. Then a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ looks as follows:

Γ
$\ldots$
$m'.\ E$ — premise
$\ldots$
$n' - 1.\ \neg(A \supset A)$
$n'.\ E \supset \neg(A \supset A)$ — deduction theorem: $m', n' - 1$
$n' + 1.\ (E \supset \neg(A \supset A)) \supset \neg E$ — $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-axiom (XII,$\beta$)
$n' + 2.\ A$ — modus ponens: $n', n' + 1$

Case 6 (7^{th} clause of the definition of a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference). a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference η of a height n of A from Γ looks as follows: $\begin{smallmatrix}\gamma\\ |\gamma_1\\ |\gamma_2\end{smallmatrix}$, where $\begin{smallmatrix}\gamma\\ \gamma_1\\ \gamma_2\\ A\end{smallmatrix}$ is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference ι of A from $\{D\} \cup \{\mathrm{B}\} \cup \Gamma$, γ contains $D \vee \mathrm{B}$, γ_1 is a part of η, starting from a premise D in η until A, γ_2 is a part of η, starting from the last premise B in η until A, itself, and $f < g, g < j, j < n-1$.[12]

Γ
$\dots$
$f.\ D \vee B$
$\dots$
$|g.\ D$ — premise
$|\dots$
$|j.\ A$
$|j+1.\ B$ — premise
$|\dots$
$|n-1.\ A$
$n.\ A - \vee_{el} : f, j, n-1$

First, let us consider a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference ι of A from $\{D\} \cup \{\text{B}\} \cup \Gamma$.

Γ
$\dots$
$f.\ D \vee B$
$\dots$
$g.\ D$ — premise
$\dots$
$j.\ A$
$j+1.\ B$ — premise
$\dots$
$n-1.\ A$

By the construction, ι contains the following $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inferences: ι_1 of $D \vee B$ from Γ, ι_2 of A from $\{D\} \cup \Gamma$, and ι_3 of A from $\{B\} \cup \{D\} \cup \Gamma$.

For $h(\iota_i) < h(\iota)$,[13] for each i from $\{1, 2, 3\}$, one can build up a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of $D \vee B$ from Γ, a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from $\{D\} \cup \Gamma$,

[12] On alternatives of this case see the footnote to the 7^{th} clause of the definition of an $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference.

[13] Unlike the other cases, this case requires the inductive hypothesis holds true for a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of *any* length less than the length of ι, *not only* for a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of a length $h(\iota) - 1$.

and a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from $\{B\}\cup\{D\}\cup\Gamma$. Then a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from $\{D\}\cup\{\mathrm{B}\}\cup\Gamma$ looks as follows:

Γ
$\ldots$
f'. $D \vee B$
$\ldots$
g'. D — premise
$\ldots$
j'. A
$j'+1$. B — premise
$\ldots$
$n'-1$. A

So, a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-inference of A from Γ looks as follows:

Γ
$\ldots$
f'. $D \vee B$
$\ldots$
g'. D — premise
$\ldots$
j'. A
$j'+1$. B — premise
$\ldots$
$n'-1$. A
n'. $B \supset A$ — deduction theorem: $j'+1, n'-1$
Γ
$\ldots$
f''. $D \vee B$
$\ldots$
g''. D — premise
$\ldots$
j''. A
$j''+1$. $D \supset A$ — deduction theorem: g'', j''
$j''+2$. $(D \supset A) \supset ((B \supset A) \supset ((D \vee B) \supset A))$ — $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-axiom (IV)

$j'' + 3$. $A - \supset_{el}$: $f'', j'' + 1, j'' + 2$ (three times)

The Theorem implies a *Corollary*: for each $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, \ldots \omega\}$, a Hilbert-style calculus $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ and a ND system $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ are equipollent, i.e., A is a $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-theorem iff A is a $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-theorem.

Final remarks

In the paper, for each logic, $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, \ldots \omega\}$, such that $I_{\langle 0,0\rangle}$ is propositional classical logic [10], we, continuing the series of works [8, 9], present a subordinated ND system $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. Moreover, each ND system has a precise definition of an inference which is a modification of V. Smirnov's approach. Our approach highlights a view on the implication introduction rule as the genus for the other indirect rules. Using a Hilbert-style calculus $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, for each logic in question, presented by V. Popov [10], we show that a formula A is provable in $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ iff it is provable in $NI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. In the future, we point out studying consequences of the precise definition with an application to complexity problems [7]. Last, not least, we look forward to formulating proof searching procedures for these ND systems in the fashion of [3, 4].

Corrections

The paper "Natural deduction in a paracomplete setting" by A. Bolotov and V. Shangin to have been published in this Journal's 20^{th} volume needs two corrections. First, the 23^{rd} entry in the references list should be replaced with "Popov V. and Solotschenkov A. Semantics of propositional paracomplete Nelson logic // Integrated scientific journal. V. 8. 2012. P. 31–32. (In Russian)". Second, the truth-table definitions for the connectives of logic PComp in the 2^{nd} section must be added with the following footnote: A. Avron had told V. Popov about these definitions at the World Congress on Paraconsistency (Ghent, 1997) and then V. Popov told one of the paper's authors about these definitions.

Acknowledgments

The author thanks the referees for commenting the previous draft of the paper.

References

[1] Anisov, A.M. *Modern logic.* Moscow: IFRAN Publishers, 2002. 273 pp. (In Russian)

[2] Bocharov, V.A., Markin, V.I. *Introduction to logic.* Moscow: Forum Publ. house INFRA-M Publ., 2011. 560 pp. (In Russian)

[3] Bolotov, A., Shangin, V. "Natural Deduction System in Paraconsistent Setting: Proof Search for PCont", *Journal of Intelligent Systems*, 2012, Vol. 21(1), pp. 1–24.

[4] Bolotov, A., Basukoski, A., Grigoriev, O., Shangin, V. "Natural deduction calculus for linear-time temporal logic", *LNAI*, 2006, Vol. 4160, pp. 56–68.

[5] Gentzen, G. *The collected papers*, ed. M.E. Szabo. North-Holland Pub. Co., 1969. 338 pp.

[6] Ivlev, Yu.V. *Logic.* Moscow: Prospect Publ., 2008. 304 pp. (In Russian)

[7] Kozhemyachenko, D. "Simulation of natural and sequent calculi", *Logic-philosophical studies*, 2016, Vol. 13(2), pp. 181–182. (in Russian)

[8] Popov, V., Shangin, V. "Syntax and semantics of simple paracomplete logics", *Logical investigations*, 2013, Vol. 19, pp. 325–334.

[9] Popov, V., Shangin, V. "Syntax and semantics of simple paranormal logics", *Logical-philosophical studies*, 2014, Vol. 6, pp. 290–297.

[10] Popov, V. "On one generalization of Glivenko theorem", *Logical investigations*, 2015, Vol. 21(1), pp. 100–121. (In Russian)

[11] Quine, W.V. "On natural deduction", *The Journal of Symbolic Logic*, 1950, Vol. 15, No. 2, pp. 93–102.

[12] Smirnov, V.A. *Formal inference and logical calculi.* Moscow: Nauka Publishers, 1972. (In Russian)

[13] Smirnov, V.A., Anisov, A.M., Arutyunov, G.P., Dmitriyev, D.V., Melentyev, A.S., and Mikhailov, F.T. *Logic and clinical diagnostics. Theoretical foundations.* Moscow: Nauka Publishers, 1994. 271 pp. (In Russian)

[14] Smirnov, V.A., Markin, V.I., Novodvorsky, A.E., and Smirnov, A.V. "Proof and proof searching", in: *Logic and computer*, Vol. 3. Moscow: Nauka Publ., 1996. 296 pp. (In Russian)

[15] Tomova, N.E., Shalack, V.I. *Introduction to logic for philosophy faculties' students.* Moscow: IFRAN Publishers, 2014. 191 pp. (In Russian)

[16] Voishvillo, E.K. *Concept as a form of thinking.* Moscow: MSU Publishers, 1989. 239 pp. (In Russian)

Логические исследования
2017. Т. 23. № 1. С. 105–120
УДК 16

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 1, pp. 105–120
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-1-105-120

Философская логика
Philosophical Logic

Е.Д. Смирнова

Природа логического знания и обоснование логических систем

Смирнова Елена Дмитриевна
Кафедра логики, философский факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова.
119991, Москва, ГСП-1, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4.

В статье рассматривается проблема обоснования логики, природы аподиктического знания, при этом акцент делается на выявлении идеальных сущностей и связей, лежащих в основе логических систем. Развивается нестандартный обобщающий подход к построению семантик, основанный на представлении областей и антиобластей высказываний (пропозиций) через множества соответствующих возможных миров, допускающих различные содержательные интерпретации. Варьирование условий, накладываемых на отношения между областями и антиобластями высказываний, позволяет различить несколько видов отношений типа логического следования. Выделяются два типа теоретико-познавательных предпосылок, от которых зависят логики, — предпосылки, связанные с концептуальным аппаратом познающего субъекта, и онтологические предпосылки. В заключительном разделе обсуждаются перспективы развития логики, возможные трансформации ее предмета и методов.

Ключевые слова: логическая семантика, обобщающий подход, природа логики, основания логики

1. Природа логического знания

На протяжении всей истории философии логика и математика выступали образцами аподиктического знания. Исследование оснований, теоретико-познавательных предпосылок логики, логических форм и законов, дает определенный ключ к пониманию природы и оснований аподиктического знания вообще.

Вопрос обоснования логики, логических систем и законов теснейшим образом связан с трактовкой природы логического знания. Что изучает логика? Является ли логика наукой о мышлении и его законах? Имеет ли она собственный базис или ее основания лежат в психологии, теории познания, метафизике? Является ли она наукой эмпирической или теоретической?

Выбор ответов на эти вопросы во многом связан с критикой психологизма в логике, который являлся господствующим направлением в логике в конце XIX в. Согласно представителям этого направления, логика эмпирическая наука, ее законы — законы некоторого естественного, природного процесса психической деятельности людей. Мышление есть психический процесс и логика изучает законы и формы этого процесса. Как писал Т. Липпс, логика есть физика мышления. При этом указание на то, что логика изучает законы и формы правильного мышления, не меняет дела, поскольку правильное мышление есть мышление, и логика, изучая его закономерности, является частью эмпирической психологии. Согласно Дж. Ст. Миллю, логика не обособленная от психологии, а подчиненная ей наука, она есть часть или ветвь психологии, своими теоретическими основаниями она целиком обязана психологии.

В русле подобного подхода обычно подчеркивается именно такого рода связь логики с психологией. Важно отметить, что при этом законы логики получают эмпирическое истолкование. Тем самым, вопросы обоснования логики фактически снимаются: изучай, как протекает наше мышление, и извлекай соответствующие законы как эмпирические обобщения. Естественным образом возникает и своеобразная трактовка нормативности — логические законы носят нормативный характер просто потому, что мы так должны мыслить, следуя природе нашего ума. Получается, если законы логики — законы некоторого природного процесса психической деятельности людей, тогда их реализация не нуждается в языке. Они живут, «прописаны» в самой природе, подобно законам физики.

Конечно, объяснение хода нашего мышления сама по себе важная, но не логическая задача. Она относится к сфере психологии, к мышлению как объекту изучения психологии. Выявляемые закономерности в этом случае могут зависеть от субъекта, времени, носить причинный характер, что не присуще законам логики. Законы логики, естественно, не зависят от такого рода факторов. Более того, люди вполне могут мыслить, нарушая законы логики. Как отмечал еще Г. Фреге, необходимый характер логических законов — это не та необходимость, которая присуща законам гравитации

Сказанное не означает, что между логикой и психологией не может быть взаимодействия. Следует отметить, что термин «психологизм» употребляется, с нашей точки зрения, в двух совершенно разных смыслах. Одно дело — рассмотрение логических форм и законов как форм и законов некоторого природного процесса, как законов «физики мышления». Совсем другое — учет определенных установок субъекта, его методов исследований в случаях определённых логических процессов. Таких, например, как поиск доказательства, решения задач. Особое значение имеет выявление роли субъекта в познавательной деятельности, в обосновании рассуждений. Мы опираемся в этих случаях на логику, но это не сама логика.

Появление логических систем, семантики которых включают определенные характеристики познающего субъекта (его знание, установки, принимаемый им концептуальный аппарат), не предполагает возврата, как иногда полагают, к психологизму и эмпиризму. Фиксация определенных установок субъекта, его знания, как, например, в случаях эпистемических логик, не означает истолкования законов логики как эмпирических законов психической деятельности людей. Включение установок субъекта в семантику логических систем не делает логику ветвью психологии.

Еще один подход к обоснованию логики состоит в том, что законы логики не рассматриваются как эмпирические законы некоторого природного процесса. Они трактуются как законы априорные, присущие нашему уму или сознанию. В таком духе определял их И. Кант, полагая, что логика — нормативная наука, потому что мы действуем согласно нормам, которые присущи нашему уму. В таком случае, фактически, законы логики могут изменяться только с изменением человеческого ума. Интересно отметить, что известный представитель психологизма в логике Бэнно Эрдман полагал, что в принципе законы логики могут изменяться, но только если люди начнут мыслить по-иному. Однако, с нашей точки зрения, и при таком подходе такого рода закономерности по-прежнему остаются эмпирическими законами природного процесса мышления людей.

Если законы логики не являются законами, априорно присущими нашему уму, и не являются законами природного процесса психической деятельности людей, т. е. законами эмпирическими, тогда каковы же основания логики, основания логических форм и законов?

Возникновение логических систем самого разного типа особо остро ставит вопрос их обоснования. При этом речь идет не об обосновании как доказательстве их непротиворечивости и полноты, а об обосновании именно логики, обосновании принимаемых типов рассуждений, выделении логических форм и структур. В свое время Э. Гуссерль высказал важнейшую, с нашей точки зрения, мысль: связи, лежащие в основе логических законов, не эмпирические, а идеальные.Эта идея получает дальнейшее развитие в случае рассмотрения оснований логических систем различного типа. Таким образом, задача заключается в выявлении идеальных сущностей, идеальных связей, лежащих в основе этих систем.

2. Обоснование логических систем: обобщенный подход

Логика своими корнями уходит в теорию познания, именно здесь можно найти основания ее законов, правил и структур. Рассмотрим эти основания.

Так, на некотором этапе развития познавательной деятельности возникают такие формы мышления как понятия, традиционно характеризующиеся через объём и содержание. При этом объемы понятий трактуются как классы, идеальные объекты. Отношения между ними объективны, это отношения пересечения, включения, внеположности и т. д. Это еще не сама логика, но это уже фундамент определенного типа рассуждений. От свойств этих отношений зависят допустимые способы рассуждений. Таковы основания силлогистики. Суждения говорят об этих отношениях в сфере общих терминов, т. е. объемов понятий. Правила вывода позволяют переходить от одних отношений к другим с сохранением истинности соответствующих суждений.

Порождаются эти идеальные объекты не логикой, а метафизикой. Это теоретико-познавательные основания логик данного типа. Должны ли они рассматриваться логикой? Точно так же как математик может рассматривать, изучать саму математику, ее сферу, операции, аксиоматику и т. д., а может заниматься основаниями математики, так же и логик может и должен рассматривать не только умозаключения, но их основания. Основания логики вписываются в сферу логических исследований, но это не есть сама логика как таковая.

Рассмотрим, какого рода идеальные объекты лежат в основе логик иного типа. Начнем с классической логики высказываний. Ее построение и обоснование принадлежат Г. Фреге. Основные, базисные, понятия Фреге — это понятия предмета и функции. Предмет при этом трактуется широко как объект рассмотрения. Выражения языка, относящиеся к предметам, — завершённые, десигнативные, в то время как выражения функций не являются десигнативными и завершенными. Предложения, соответственно, представляют собой десигнативные выражения. Их смысл — информация об объекте рассмотрения, мысль, выражаемая предложением, а обозначаемое — ситуация, соответствующая этой информации. Так предложение «Волга впадает в Каспийское море» задает одну соответствующую ситуацию, предложение «Волга впадает в Северный Ледовитый океан» — другое положение дел.

Если отвлечься от конкретного смысла конкретного предложения, то что остается от его значения (Bedeutung), от соответствующей ситуации? В качестве такой ситуации остается тот факт, что она есть наличествующая в действительности или отсутствующая. Но это уже иные, абстрактные ситуации, обозначаемые Фреге das Wahre и das Falsche. Таким образом, в области рассмотрения появляются новые идеальные объекты. Естественно, при этом под действительностью не обязательно имеется в виду реальная действительность, данная нам в ощущениях, это может быть действительность, например, мира математики.

Так же, как и в случае оснований силлогистики, между этими идеальными объектами, ситуациями, возникают объективные отношения. В случае классической пропозициональной логики существенно отметить, что эти две ситуации несовместимы и каждому предложению соответствует ровно одна из этих ситуаций das Wahre или das Falsche: если ситуация не отсутствующая, то она наличествует, и наоборот.

Это пока ещё не логика, это ее предпосылки. Логика начинается тогда, когда мы вводим логические функции, задаваемые на этих абстрактных объектах (конъюнкция, дизъюнкция и т. д.). Это уже сфера логического, но еще не задание логики высказываний как таковой. Собственно логика — это обоснование рассуждений, умозаключений. Важным становится определение логического следования. А дальше задаются соответствующие правила типа, например, modus ponens, которые с необходимостью обеспечивают сохранение следования.

Определённые отношения между идеальными сущностями, таким образом, дают базу для построения логики. Что меняется, когда мы переходим к логикам другого типа, например, многозначным? В классической логике мы имеем дело с ситуациями das Wahre (T) и das Falsche (F). А нельзя ли выделять ситуации по каким-то другим характеристикам? Например, можно ввести ситуацию, когда неизвестно, наличествует она или не наличествует. С. Клини такую ситуацию означал как u, но отмечал при этом, что она принципиально отличается от ситуаций T и F, существующих (или не существующих) объективно. В случае же выделения положения u появляется момент субъективности, относящийся к знанию, полаганию. Перед нами две возможности: либо получаем трехзначную логику, выделяя u как третье самостоятельное значение, либо предложения, относящиеся к ситуации u, рассматриваются как индетерминированные, что приводит к логике с истиннозначными провалами.

При предлагаемом нами нестандартном, обобщающем подходе к построению семантик в качестве исходных, идеальных объектов вводятся классы возможных миров, представляющих собой области и антиобласти высказываний (propositions). Миры могут интерпретироваться при этом различным образом: как принимаемые условия, предпосылки или ситуации. Исходно пропозициональным переменным (соответствующим простым высказываниям) приписываются не истинностные значения T и F, а области и антиобласти, которые вводятся независимо друг от друга. Пусть W — принимаемое множество возможных миров, а φ — функция, приписывающая пропозициональным переменным области и антиобласти, соответственно. Область предложения p есть класс миров, в которых оно истинно, класс условий, его верифицирующих($\varphi T(p)$, где $\varphi T(p) \subseteq W$). Антиобласть высказывания p есть класс положений, условий, фальсифицирующих, опровергающих его ($\varphi F(p)$, где $\varphi F(p) \subseteq W$). Под опровергающими можно понимать просто фальсифицирующие его положения, а можно понимать эти положения в интуиционистском духе, когда есть алгоритм опровержения. Основания классической логики представляют собой частный случай обобщающего подхода.

Определение условий истинности высказываний принимает вид:

A истинно в мире w_i (при условии w_i), е.т.е. этот мир принадлежит области высказывания A, т. е. *Ист* $(A, w_i) \Leftrightarrow w_i \in \varphi T(A)$.

Аналогично вводится понятие ложности высказывания, независимым образом: *Л*$(A, w_i) \Leftrightarrow w_i \in \varphi F(A)$.

Приписывание пропозициональным переменным классов возможных миров придает логическим связкам интенсиональный характер, что ведет к обоснованию интенсиональных логик.

Условие приписывания предиката истинности высказыванию релятивизировано относительно определенных обстоятельств, условий. В рассмотрение фактически включаются определенные аспекты когерентной концепции истинности, и известная схема Тарского — $x \in$ Истинно $\Leftrightarrow p$ — меняет свой вид, пересматривается.

Отношения между исходными идеальными объектами — областями и антиобластями — могут быть разными. Области и антиобласти могут быть внеположными, а могут пересекаться (высказывание A может верифицироваться и в то же время опровергаться, что служит основой паранепротиворечивых логик). Их объединение может не исчерпывать все множество возможных миров W (в случае, когда условия не подтверждают и не опровергают A, что детерминирует соответствующие семантики с истиннозначными провалами) и т. п. Принимаемые отношения между областями и антиобластями обуславливают в свою очередь принятие (или непринятие) логических принципов непротиворечия и исключенного третьего.

Рассмотрим условия:

(1) $\varphi T(A) \cap \varphi F(A) = \varnothing$

(2) $\varphi T(A) \cup \varphi F(A) = W$.

Принятие или отбрасывание этих условий детерминирует семантики различного типа. При принятии условий (1) и (2) мы имеем стандартную семантику; при принятии условия (1) и отбрасывании (2) — семантику с истиннозначными провалами; при принятии (2) и отбрасывании (1) — двойственную ей семантику с пресыщенными оценками. Наконец, четвёртый случай — отбрасывание (1) и (2) дает семантику релевантной логики первого уровня. При этом важно отметить, что речь пока идет о методологических предпосылках логических систем и их семантик, а не о самих системах, их правилах и законах.

В свою очередь, ведение понятий областей и антиобластей позволяет вместо единственного, классического понятия логического следования ввести целый класс отношений типа следования, не затрагивая при этом условия (1) и (2) (см. [6, с. 264]).

Таким образом, при данном подходе комбинирование двух независимых условий детерминирует типы логик, типы правил вывода — это принимаемое отношение следования в сочетании с принятием (отбрасыванием) условий (1) и (2), т. е. в сочетании с фиксацией отношений между областями антиобластями. Именно эти моменты определяют принятие правил, например, типа modus ponens или правила дедукции.

Формализацией введенных отношений следования, в зависимости от условий (1) и (2) (см. [6, гл. VI, § 3]), могут выступать первоуровневые фрагменты логики Клини (логика Хао Вана), двойственной ей логики — логики парадокса Приста, логики Лукасевича (или совпадающий с нею фрагмент логики RM), релевантной логики, а также классическая логика высказываний.

Еще один важный вопрос — это вопрос об истоках индетерминируемости высказываний. В рамках обобщающего подхода, благодаря тому, что высказываниям приписываются теперь не ситуации или положения дел, а области и антиобласти, т. е. классы миров, появляется возможность интерпретировать возникновение индетерминированности высказываний особым образом. Вместо того, чтобы следуя заложенной Клини традиции вводить особую ситуацию u в качестве третьего значения предложений наряду с ситуациями T и F, индетерминированность высказываний можно обосновывать через отсутствие соответствующих верифицирующих и опровергающих их условий. Некоторое утверждение A может в принципе быть не подтверждаемым и не опровергаемым, когда $\varphi T(A) = \varnothing$ и $\varphi F(A) = \varnothing$.

При нашем обобщающем подходе высказывания индетерминированы потому, что им не соответствуют ни области, ни антиобласти, что более соответствует процессу познания. Например, таковы утверждения об идеальных элементах в смысле Гильберта. Они не получают истинностной оценки в отличие от действительных высказываний математики. Такую же трактовку допускает утверждение о множестве всех нормальных множеств, используемое в формулировке парадокса Рассела. Его истинностная оценка приводит к противоречию. Введение высказываний с пустыми терминами («круглый квадрат» и т. п.) также приводит к противоречиям или нарушению законов логики.

Естественно, источником индетерминируемости могут выступать и иные обстоятельства — невыполнимость пресуппозиций высказываний, несоблюдение области действия предиката и т. п. В последнем случае возникают предложения типа «Цезарь простое число», «Добродетель треугольна», «Дух зеленый».

3. Логика и онтологические предпосылки

Рассматривая основания логических систем, следует различать два типа теоретико-познавательных предпосылок, от которых зависят логики. Во-первых, это предпосылки, связанные с концептуальным аппаратом познающего субъекта: с принимаемыми понятиями истинности, ложности, логического следования, отрицания, суждения и т. д., которых мы уже касались выше. Во-вторых, это предпосылки (назовем их предпосылками онтологического характера), налагаемые на характер объектов универсума рассмотрения (например, воображаемые миры Васильева, или идеальные и действительные объекты у Гильберта, или возможные миры в семантиках модальных систем).

Казалось бы, логические формы и законы не зависят от характера объектов рассмотрения, они универсальны. Кант, например, полагал, что общая (формальная) логика имеет дело лишь с необходимыми и всеобщими правилами мышления вообще, она исследует их без различия объектов, т. е. в отрыве от материи, являющейся предметом мысли, и посему она отвлекается от всякого содержания познания. «Общая логика открывает только форму мышления, но не материю. Она отвлекается от всякого содержания познания» [5, фрагмент 1627]. Логика действительно не зависит от конкретного положения дел в действительности, от конкретного содержания посылок. В этом смысле она не зависит от содержания познания, как это и утверждал Кант. Логика теоретическая наука, но она не зависит лишь от конкретного содержания познания, но может зависеть то типов объектов познания.

К идее зависимости логики от характера объектов рассмотрения приходит известный русский логик начала XX в. Н. Васильев. Васильев различал законы логики и законы металогики. Законы логики зависят от «эмпирии», но не в смысле психологизма и эмпиризма. Они носят эмпирический характер в том плане, что определяются характером познаваемых объектов, их «онтологией». Изменяться они могут с изменением типов объектов рассмотрения. По аналогии с неэвклидовой геометрией, где открывается иной мир геометрических объектов, появляются объекты, не отвечающие положениям и теоремам эвклидовой геометрии (треугольники, сумма углов которых меньше 180°, пересекающиеся параллельные прямые и т. д.), в мире «воображаемой» логики появляются особые объекты, не отвечающие законам классической логики. Допускаются объекты, обладающие несовместимыми свойствами P и $nonP$. Тогда для них верным оказывается положение: (s есть P & (s есть $nonP$). В воображаемой логике возникают три вида суждений: положительные, отрицательные и суждения противоречия.

В случае введения указанного вида объектов нарушаются классические законы непротиворечия и исключенного третьего.Согласно Васильеву, «мы можем мыслить другие миры, чем наш, в которых некоторые логические законы будут иными, чем в нашей логике. . . », логические законы в нашей воображаемой логике зависят не от познающего субъекта, а от характера познаваемых объектов [1, с. 57].

В отличие от законов логики законы металогики связаны с познающим субъектом, с нашими понятиями вывода, истинности, ложности, суждения. Поэтому эти логические принципы не могут устраняться, они присущи любому логически правильному мышлению независимо от характера объектов познания. Металогика отражает только природу познающего субъекта. Поэтому «металогика есть логика, пригодная для каждого мира, как бы своеобразно ни было устройство объектов этого мира» [1, с. 115]. «Суждение не может быть одновременно истинным и ложным». Этот закон несовместимости истинности и ложности, по Васильеву, является универсальным «законом абсолютного разграничения истины и лжи», и его не следует смешивать с законом противоречия. «Без этого закона невозможна никакая логика. . . Тот, кто перестал бы отличать истину от лжи, тот перестал бы мыслить логически» [1, с. 64–65].

Таким образом, по Васильеву, принципы логики, связанные с концептуальным аппаратом субъекта, абсолютны и неизменны. Возникает принципиальный вопрос, так ли это? Выше в связи с обобщающим подходом к семантике было показано, что концептуальный аппарат познающего субъекта не является абсолютным, неизменным, и законы логики, связанные с этим аппаратом, соответственно, также могут изменяться. Так, пересмотр понятий истинности и ложности, отношений между ними (между областями и антиобластями) приводит к нестандартным семантикам и обуславливает особые способы рассуждений, базирующиеся на этих семантиках.

Рассмотрим еще один аспект связи логики с онтологическими предпосылками — условия применения логических структур и законов. Гильберт, рассматривая истоки возникновения парадоксов в такой строгой и точной науке, как математика, ставил вопрос об их основаниях. Считалось, что основанием является применение законов и правил классической логики. Соответственно для избавления от парадоксов надо поставить барьер на пути порождения противоречия, изменив лежащую в основе логику. Гильберт «переворачивает» эту последовательность, задаваясь вопросом: разве логика нас когда-либо обманывала, если мы применяли ее к должным образом введенным идеальным объектам? Такая постановка вопроса представляется принципиально важной.

Кант полагал, что логика формальная и потому не имеет отношения к содержанию нашего знания. Это верно, как отмечалось выше, относительно содержания наших посылок, но при этом логика не оторвана от содержания нашего познания, от типов идеальных объектов, порождаемых именно в познавательной деятельности. Гильберт подразделял идеальные объекты математики (и, соответственно, высказывания о них) на действительные (подлинные) объекты и, следуя его терминологии, «идеальные элементы». Высказывания о них не могут оцениваться как истинные или ложные. Это объекты-фикции, в принципе не реализуемые ни в каком возможном опыте, даже в сфере идеальных математических сущностей. Им придается статус трансцендентальных идей И. Канта. Это объекты типа бесконечно удаленной точки в проективной геометрии, трансфинитных чисел и т. п. Применение логики к такого рода объектам, «идеальным элементам», не обосновано и требует определенных «заградительных мер».

Таким образом, применение законов логики связано с типом вводимых в универсум теории идеальных объектов. В этом случае логика выступает как своеобразная лакмусовая бумажка, сетка, разграничивающая эти идеальные объекты в сфере той же математики. Вот о чем говорят логические парадоксы.

4. Логика и философия

Рассматривая связь логики с философией, следует выделить два круга вопросов: вопросы обоснования логических систем, обоснования аподиктического, нормативного характера логических законов и принципов, и вопросы роли логики, «логических сеток» в анализе принципиальных философских проблем.

Вопросы обоснования логики своими корнями уходят в метафизику, теорию познания, в онтологию в широком смысле. Там, как мы видели, рождаются идеальные объекты, идеальные связи, составляющие базу логических операций и отношений.

Касаясь роли логики в анализе философских вопросов, интересно отметить, что Д. Гильберт в своем известном итоговом, завершающем его научную деятельность докладе «Познание природы и логика» во главу угла исследования оснований математики, перспектив ее развития и роли логики ставит именно глобальную философскую проблему. Задачу своего доклада он видит в том, чтобы «обсудить старую философскую проблему, а именно вызвавший много спросов вопрос о том, какой вклад в наше познание вносят, с одной стороны, мышление, а с другой — опыт. Этот старый вопрос правомерен, потому что ответить на него — в сущности означает установить, к какому роду относится все наше естественно-научное познание вообще...» [4, с. 118].

Формальная логика, как мы видим, всегда была связана с принципиальными философскими проблемами. С превращением формальной логики в символическую в ней стал применяться сложный технический аппарат исчислений, а также использоваться достаточно богатые математические средства. В связи с этим встает вопрос о связи логики и математики. Полагают нередко, что современная логика отошла от философии, как говорится, «ушла с философской сцены», стала областью разработок математиков. Однако это не так. Напротив, связь формальной логики с философией стала более глубокой и многосторонней.

Применение искусственных, формализованных языков не удаляет логику от рассмотрения содержательных логических связей и отношений, а служит средством, инструментом репрезентации логических процедур однозначным и строгим образом. Иначе не стоял бы вопрос об адекватности соответствующих формализаций. А кто строит такого рода формализации, логик или математик, не играет в этом плане принципиальной роли. Исчисления не являются «собственностью» математики. Еще Г. Фреге отмечал, что применение в логике особого языка символов не делает ее частью математики.

Что касается термина «философская логика», то он не используется однозначно. Любая логика базируется на определенных теоретико-познавательных предпосылках, в этом плане она всегда философская. Философскую логику можно выделять и на другом основании. Если мы используем в посылках непосредственно философские термины и понятия («необходимо», «случайно», «возможно», «знает», «верит», «всегда было так, что» и т. п.) и на их смыслах базируются выводы, тогда такого рода логики подпадают под термин «философская логика».

Касаясь перспектив развития логики, можно выделить несколько направлений. Одна линия связана с компьютеризацией. Мы видим, что в случае интуиционистской логики истинность высказывания обосновывается алгоритмом построения соответствующего положения дел. Можно предположить, что в случае построения программ будет происходить нечто аналогичное, только роль алгоритма будут играть программы — они порождают новые объекты конструктивным путем по правилам. Появятся новые логики, основывающиеся на этих эффективно заданных объектах.

Разработка на стыке логики и математики различных подходов к экспликации понятия эффективности, исследование роли, возможностей и границ формализаций также могут включаться в сферу построении языков программирования.

Особый интерес представляет использование языка как «аналитического метода». Уточнение понятия выразимости (определимостей) свойств, отношений, операций в языках с точно заданной структурой — введение таких понятий, как семантическая определимость («Tr-определимость»), рекурсивная определимость, становятся средством выявления характеров, эффективной заданности соответствующих сущностей. Так, семантически неопределимый предикат (класс) не является рекурсивно перечислимым и не является, соответственно, аксиоматизируемым. Рекурсивно определимые в языке предикаты и функции рекурсивны и обратно.

Еще один путь, связанный с перспективой развития логики — расширение сферы логического. Логика сегодня выступает не только как теория рассуждений, но и как определенный аспект познавательной деятельности — как основа схем построения «картины мира». Впервые эту идею выдвинул Л. Витгенштейн: «Логика не теория, а отражение мира» [2, с. 89, тезис 6.13]. В познавательной деятельности мы всегда имеем дело с «картинами мира», с «сетками», через которые мы смотрим на мир, а они логические и имеют логические основания. Логика лежит в основе схем построения «картин мира». Основополагающие принципы построения познавательных сеток относятся к сфере логики. Это позволяет утверждать, что логика не только теория рассуждений, но и основа определенных методов познавательной деятельности.

Литература

[1] *Васильев Н.* Воображаемая логика // Логос. 1912–1913. Кн. 1–2. С. 53–81.

[2] *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 133 с.

[3] *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. 491 с.

[4] *Гильберт Д.* Естествознание и логика // Кантовский сборник. 1990. Вып. 15. С. 122–123.

[5] *Kant I.* Gesammelte Schriften. Bd. XVI. Berlin, 1924. 875 s.

[6] *Smirnova E. D.* Logic in Philosophy and Philosophical Logic. N. Y.: Edwin Mellen Press Limited, 2000. 392 p.

E. D. Smirnova

The Nature of Logical Knowledge and Foundations of Logical Systems

Smirnova Elena Dmitrievna
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University
Lomonosovsky prospect, 27–4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.

In this paper, I address a wide range of problems related to the nature of apodictic knowledge and foundations of logic. In so doing, a primary focus is on ideal entities and connections, forming a ground for logical systems. The core component of the conception presented is a so called 'generalized approach to semantics formation', which presupposes that (i) every statement can be associated with a pair of sets representing 'extension' and 'anti-extension' of a statement, correspondingly; (ii) these sets consists of differently interpreted possible worlds. A variation of requirements for relations between these sets opens possibility to define logical consequence in a different way that, in turn, results in a variety of logical systems. An important consequence of a generalized approach is an identification of two types of epistemological presuppositions: those connected with conceptual apparatus of cognitive agent, and ontological commitments. The final section contains a discussion of perspective for logic and possible transformations of its subject-matter and methods.

Keywords: logical semantics, generalized approach, nature of logical knowledge, foundations of logic

References

[1] Vasil'ev, N. "Voobrazhaemaya logika" [Imaginary logic], *Logos*, 1912–1913, kn. 1–2, pp. 53–81. (In Russian)

[2] Vitgenshtein, L. *Logiko-filosofskii traktat* [Tractatus Logico-Philosophicus]. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoi literatury. 1958. 133 pp. (In Russian)

[3] Gil'bert, D. *Osnovaniya geometrii*[Foundations of geometry]. Moscow; Leningrad: OGIZ, 1948. 491 pp. (In Russian)

[4] Gil'bert, D. "Estestvoznanie i logika" [Natural science and logic], *Kantovskii sbornik*, 1990, vyp. 15, pp. 122–123. (In Russian)

[5] Kant, I. *Gesammelte Schriften.* Bd. XVI. Berlin, 1924. 875 S.

[6] Smirnova, E. D. *Logic in Philosophy and Philosophical Logic.* New York: Edwin Mellen Press Limited, 2000. 392 pp.

Логические исследования
2017. Т. 23. № 1. С. 121–139
УДК 16

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 1, pp. 121–139
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-1-121-139

В.И. Шалак

Аналитический подход к решению задач

Шалак Владимир Иванович
Сектор логики, Институт философии РАН
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1.
E-mail: shalack@gmail.com

Настоящая работа посвящена формализации аналитического подхода к решению задач. Обычно считается, что задача включает две составляющие — условия и цели. Условия A — это то, что дано, а цели B — то, что требуется найти или построить. В этом случае при формальном анализе решение рассматривается как некоторый вывод $A \vdash B$ цели из условий задачи. Такое представление широко распространено, но слишком узко для применения в реальной практике. Возьмем, например, задачу построить железную дорогу между двумя городами. Очевидно, что существует много вариантов прокладки дороги, и условия реализации каждого из этих вариантов будут различаться. Это означает, что в момент постановки задачи нет точных формулировок ни цели, ни условий, чтобы ее можно было представить в стандартном виде. Необходим дополнительный аналитический этап решения задачи. Он заключается в последовательном уточнении цели и ее редукции к более простым подцелям, которые на заключительных шагах образуют совокупность достаточных условий решения задачи. В предлагаемой работе построено аналитическое исчисление, которое в определенной степени формализует этот процесс.

Ключевые слова: решение задач, логическая редукция, аналитические таблицы, теория определений

1. Преамбула

Вспомним школу и одну из типичных задач арифметики, которую в разных вариантах всем нам приходилось решать.

Есть бассейн объемом V кубических метров и две трубы. Через одну трубу в него поступает вода со скоростью n литров в минуту, а через вторую — вытекает со скоростью m литров в секунду. Требуется определить, через сколько минут бассейн будет наполнен до краев.

Мы составляем уравнение $n \times t - m \times t \times 60 = V \times 1000$ и из него находим время $t = V \times 1000/(n - m \times 60)$. Задача решена. Если $t \geq 0$, то бассейн наполнится водой через t минут, а если $t < 0$, то никогда.

Задача довольно рафинированная. Для ее решения достаточно составить уравнение, связывающее указанные в условии задачи параметры, и после этого произвести вычисление.

Решение подобных задач, но в общем виде, исследуется в теории синтеза программ [2]. Есть описание $A(x)$ предусловий выполнения программы, и есть описание постусловий $B(x, y)$, при которых она должна завершиться. Средствами интуиционистской логики ищется доказательство формулы $\forall x(A(x) \Rightarrow \exists y B(x, y))$. Если доказательство найдено, то по его шагам синтезируется соответствующая программа. Это возможно благодаря реализуемостной интерпретации интуиционистской логики.

С момента возникновения интереса к Искусственному Интеллекту отдельным направлением исследований в его рамках стало планирование действий. Одной из стандартных тестовых задач является планирование действий в мире кубиков [8, с. 337–363], когда начальную конфигурацию кубиков необходимо преобразовать в целевую. При этом набор возможных элементарных действий ограничен. В качестве эвристики можно ввести функцию расстояния от текущего состояния мира до целевого и при перестановке кубиков стремиться минимизировать ее значение.

Подобные задачи интересны, но очень ограничены. Начальное и целевое состояния в них описаны полностью и остается лишь найти путь от первого ко второму в некотором пространстве промежуточных состояний. Гораздо больший интерес представляют задачи, решение которых требует выхода за рамки изначальных условий. Это один из отличительных признаков творческих задач.

Начнем с простого, вспомним, как мы планируем летний отпуск. Цель — хорошо его провести. Мы садимся и начинаем думать, как этого достичь? Цель расщепляется на альтернативы. У нас есть выбор между отдыхом дома на диване с книжкой, отдыхом на дачных грядках, пляжным отдыхом, отдыхом на природе, активным отдыхом, музейным и т. д. Наши предпочтения определяют, какой из вариантов мы будем рассматривать в первую очередь. Допустим, мы выбрали пляжный отдых. После этого мы задумываемся о месте, где его лучше всего провести. Опять появляются альтернативы по странам и затем по городам, и опять наши предпочтения определяют, какие варианты мы будем рассматривать в первую очередь. После того как страна и город выбраны, мы должны выбрать тип размещения — отель или апартаменты. Выбор альтернатив большой и осуществляется на основе предпочтений по расположению, цене, объему предоставляемых услуг. Информация об этом берется из справочников и специализированных сайтов Интернета. На конечном шаге мы должны решить, либо самим бронировать места и авиабилеты, либо обратиться в туристическое агентство. Исходная цель сведена к простым действиям, которые мы уже знаем, как осуществить. Таким образом, планирование действий путем анализа сложной и недостаточно четко определенной цели сведено к простым действиям, которые ограничены рамками частичных описаний текущего состояния мира. Так же мы можем рассмотреть и другие варианты отдыха, сравнить их и выбрать наиболее предпочтительный.

Необходимо обратить внимание на важное отличие решения задач по планированию действий, связанных с *преобразованием* текущего состояния мира, от задач, которые можно назвать *статическими*. В последних задачах мы сводим их решение к решению более простых задач и в конечном счете к нахождению значений неизвестных параметров. После этого мы просто синтезируем решение. В задачах планирования действий мы тоже сводим решение сложных задач к решению более простых, но на конечном этапе приходим к элементарным ситуациям, которые пока что не имеют места в мире. И теперь, чтобы решить такую задачу, мы должны выполнить некоторые действия, направленные на то, чтобы эти элементарные ситуации, к которым мы свели задачу, имели место. Например, мы свели задачу об отдыхе к тому, чтобы забронировать места в отеле и купить билеты для поездки. Это мы и должны сделать, чтобы отдых состоялся.

Рассмотрим еще одну творческую задачу. Ночью на берегу моря мы нашли чугунную на вид гирю G и хотим узнать, может ли внутри нее быть спрятано золото? Никакого очевидного решения не просматривается, на зуб не проверишь. Поэтому мы редуцируем начальную задачу к двум альтернативам, которые первыми пришли нам в голову. Первая альтернатива — распилить и посмотреть, а вторая — сравнить физические параметры G с параметрами гири G_0 в том случае, если бы она действительно была изготовлена из чугуна. Первую альтернативу выбрал Шура Балаганов, мы выбираем вторую. Из всех параметров наибольший интерес представляет вес гири, поскольку нам известно, что плотность золота почти в два с половиной раза больше плотности чугуна, и поэтому вес гирь G и G_0 должен заметно отличаться. Вес гири G легко определить путем взвешивания. Это мы сделать можем, у нас под рукой оказались весы-безмен. Второй такой же, но полностью чугунной гири у нас нет. Поэтому нам остается прибегнуть к теории. Весь гири G_0 вычисляется по формуле $P_{G0} = m_{G0} \times g = V \times \rho_{ch} \times g$. Плотность чугуна ρ_{ch} и ускорение земного тяготения g мы помним со школьной скамьи, осталось лишь определить объем V. Но как это сделать? Одна альтернатива — набрать в кастрюлю воду до краев, опустить в нее гирю, собрать в мензурку воду, которая выльется из кастрюли, и узнать объем V. Но у нас на берегу моря нет ни кастрюли, ни мензурки. Значит, эта альтернатива нам не подходит. Но есть другая альтернатива. Мы опять подвешиваем гирю на безмене и опускаем ее в воду, чтобы измерить вес P_{Gw} гири в воде. Согласно закону Архимеда $P_{Gw} = P_G - V \times \rho_w \times g$. Отсюда мы получаем $V = (P_G - P_{Gw})/(\rho_w \times g)$ и, подставив в первую формулу, узнаем вожделенное значение веса $P_{G0} = (P_G - P_{Gw}) \times \rho_{ch}/\rho_w$, которое с точностью до погрешности измерений нашего безмена совпадает с P_G.

Задачи планирования отпуска и поиска золота в чугунной гире являются действительно творческими, поскольку для их решения требуется выйти за границы того, что дано изначально. При этом поиск решения не является бессистемным, а заключается в уточнении используемых понятий и их последующей логической редукции. Благодаря этому мы не удаляемся от цели случайным образом, а релевантно расширяем поле поиска вокруг нее. Очевидно, это сильно отличается от методов синтеза программ и планирования действий в мире кубиков.

2. В поисках метода

Проблема поиска регулярных методов решения творческих задач имеет давнюю историю. Можно вспомнить знаменитые *«Правила для руководства ума»* Р. Декарта [1], где перечисляются и объясняются правила, которым должен следовать ученый в своей работе. Можно вспомнить Лейбница и его идею универсального исчисления, которое позволяло бы единообразным способом находить ответы на любые разумно поставленные вопросы.

В наше время на тему поиска общих методов решения задач много писал Д. Пойя. Широкую известность получили его книги *«Математическое открытие»* [4] и *«Математика и правдоподобные рассуждения»* [3]. Отталкиваясь от идей Декарта, он обращает внимание на эвристическое использование индуктивных рассуждений и рассуждений по аналогии, которые очень часто помогают в поиске решений.

Эта проблема интересовала В.А. Смирнова. В статье *«Творчество, открытие и логические методы поиска доказательства»* [7], он хотел *«...обратить внимание на новые возможности использования логических методов и идей в исследовании исключительно сложной проблематики поиска, открытия и творчества»* [7, с. 447], считая, что *«одна из целей науки — создание типовых методов, позволяющих стандартным образом решать целые классы задач. В этом отношении характерно соотношение нестандартного, творческого и стандартного, рутинного моментов в поисках решения задач. Без наличия методов задача может быть сугубо творческой. Создание метода решения превращает творческую задачу в стандартную. Творческая деятельность переходит от решения самой задачи к созданию методов ее решения. Это характерно не только для познавательной, научной деятельности. Создание техники, орудий труда, технологии основано на том же "обращении" творческой деятельности»* [7, с. 446].

Стремительное развитие современных технологий привело к тому, что поиск общих методов решения задач переместился из теоретической плоскости в практическую. В качестве примера можно привести работы Т. Саати [5, 6]. Он предложил метод анализа иерархий целей, который сразу привлек к себе внимание. Заслуга Саати заключается в том, что его метод позволяет одновременного учитывать многие критерии предпочтения при оценке иерархии целей [6, с. 24–27], но в нем не содержится никаких правил построения самих иерархий.

На практике не существует установленной процедуры генерирования целей, критериев и видов деятельности для включения в иерархию или даже в более общую систему. Это зависит от тех целей, которые мы выбираем для декомпозиции сложной системы. Обычно эта процедура начинается с изучения литературы для обогащения мыслями, и часто, знакомясь с чужими работами, мы как бы проходим через стадию мозгового штурма для составления перечня всех концепций, существенных для задачи, независимо от их соотношения или порядка [5, с. 20].

Несмотря на это, работы Саати получили широкую известность и множество практических приложений, что говорит о востребованности такого рода исследований.

3. Основная идея

Если цель, или задача, описана в виде предложения логики предикатов, то ее можно редуцировать к набору подцелей. Но в большинстве действительно интересных случаев цель не бывает описана настолько полно, чтобы для ее решения было достаточно одной лишь логической редукции. В первоначальном описании цели могут встречаться термины, которые нуждаются в дополнительном уточнении. Это приводит к расширению языка описания задачи новыми понятиями и терминами. Они добавляются в язык не случайным образом, а имеют то или иное отношение к основной цели или ее подцелям.

Логическим инструментарием, который позволяет совместить анализ целей с расширением радиуса поиска дополнительной информации, является теория определений. Определения позволяют уточнять (эксплицировать) цели-предикаты, разлагая их на логически связанные подцели, затем на под-подцели и т. д. При этом допускается, чтобы в определяющей части присутствовали термины, которые в будущем также потребуют экспликации.

На шаге уточнения терминов языка происходит вмешательство субъективного фактора. От того, насколько удачно выбрано определение терминов, может зависеть успех в решении всей задачи.

Для простоты дальнейшего изложения мы ограничимся конечными предметными областями, в которых каждый индивид может быть поименован. При задании семантики языка это позволит использовать подстановочную интерпретацию кванторов [9].

4. Схема языка

Так как язык описания задачи в ходе ее решения может расширяться, мы зададим не сам язык, а схему, указав, что может входить в его состав.

Исходные символы

1. $Sort$ — конечное множество сортов;
2. Var — конечное множество индивидных переменных;
3. $Const$ — конечное множество индивидных констант;
4. $Pred$ — конечное множество предикатных констант;
5. $\&, \vee, \neg$ — логические связки;
6. $\forall, \exists$ — кванторы;

Каждой индивидной переменной $x \epsilon Var$ и каждой константе $c \in Const$ сопоставлен их сорт $s \in Sort$. При необходимости будем обозначать это посредством x/s и c/s.

Каждой n-местной предикатной константе P^n также сопоставлен сорт, имеющий вид кортежа сортов ее аргументных мест $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$. Это мы будем обозначать посредством $P^n/\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$.

Формулы

1. Если $t_1/s_1, \ldots, t_n/s_n \in Const \cup Var, P \in Pred, P/\langle s_1, \ldots, s_n\rangle$, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ — (атомарная) формула.

2. Если A и B — формулы, то $\neg A, (A \& B), (A \vee B)$ — формулы.

3. Если $x \in Var$ и A — формула, то $\forall x A, \exists x A$ — формулы. В тех случаях, когда необходимо явное указание на сорт подкванторной переменной, мы будем использовать запись $\forall x/sA, \exists x/sA$.

4. Ничто другое формулой не является.

Определения

Если $P/\langle s_1, \ldots, s_n\rangle$ — предикатный символ, не имеющий вхождений в формулу A, все свободные индивидные переменные которой содержатся среди $\mathbf{x} = \langle x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n\rangle$, то определением будем называть формулы вида $\forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)$, где "$P\mathbf{x} \equiv A$" — обычное сокращение для $(P\mathbf{x}\&A) \vee (\neg P\mathbf{x}\&\neg A)$.

Соглашение об обозначениях

1. Если S — множество формул языка, то посредством $L(S)$ обозначим язык, который содержит лишь те сорта, индивидные переменные, константы и предикатные символы, которые имеют вхождения в формулы множества S.

2. Запись $\forall \mathbf{x} P\mathbf{x}$ будет использоваться как сокращение для $\forall x_1 \ldots \forall x_n P(x_1, \ldots, x_n)$, а $P\mathbf{t}$ — сокращение для $P(t_1, \ldots, t_n)$.

5. Правила исчисления

Исчисление мы будем строить в виде аналитических таблиц, имеющих вид дерева. Это самый естественный способ представления редукции формул. Обычно различают аналитические таблицы в виде дерева формул, как у Смалльяна, и таблицы в виде дерева множеств формул, как у Фиттинга. В нашем случае более удобны таблицы, узлы которых имеют вид множеств формул. Кроме этого, множествам формул узла будет сопоставлен их язык. Для этого нам потребуются три метапеременные, которые могут изменяться в процессе построения таблиц:

1. L — язык;
2. Def — множество определений;
3. Mod — множество замкнутых атомарных формул или их отрицаний (модельное множество).

Для представления узлов мы будем использовать запись, содержащую указание на множество целей Aim и метапеременные L, Mod и Def:

$$L, Mod, Def \vdash Aim$$

Знак “$\vdash$” используется, чтобы при записи просто отделить множество целей Aim от языка L, модельного множества Mod и множества определений Def. Никакого дополнительного смысла он не несет. Начальный узел дерева имеет вид $L(Aim), \varnothing, \varnothing \vdash Aim$. Формулы множества Aim замкнуты. Конечной задачей редукции является построение модели, в которой будут истинны все формулы Aim. Правила редукции делятся на четыре группы:

1. правила логических связок;
2. правила кванторов;
3. правила литералов;
4. правила замыкания.

В формулировках правил редукции мы будем указывать метапеременные L, Mod и Def лишь в тех случаях, когда их значения являются условиями применения правил или изменяются в результате такого применения. При формулировке правил редукции запись $\vdash S, A$ следует понимать как $\vdash S \cup \{A\}$, где S — множество формул (возможно, пустое), а запись S_A следует понимать как сокращение для $S \smallsetminus \{A\}$.

Правила связок

$$(\neg\neg)\ \frac{\vdash S, \neg\neg A}{\vdash S_{\neg\neg A}, A}$$

$$(\&)\ \frac{\vdash S, (A\&B)}{\vdash S_{(A\&B)}, A, B} \qquad (\neg\&)\ \frac{\vdash S, \neg(A\&B)}{\vdash S_{\neg(A\&B)}, \neg A \mid\ \vdash S_{\neg(A\&B)}, \neg B}$$

$$(\vee)\ \frac{\vdash S, (A \vee B)}{\vdash S_{(A\vee B)}, A \mid\ \vdash S_{(A\vee B)}, B} \qquad (\neg\vee)\ \frac{\vdash S, \neg(A \vee B)}{\vdash S_{\neg(A\vee B)}, \neg A, \neg B}$$

Правила для логических связок не требуют особых комментариев. Если нам нужно построить модель для множества формул $S \cup \{(A\&B)\}$, то для этого достаточно построить модель для множества формул $S_{(A\&B)} \cup \{A, B\}$. Аналогично, если нам нужно построить модель для множества формул $S \cup \{(A \vee B)\}$, то узел дерева редукций расщепляется на две ветви, т. к. достаточно построить модель для множества формул $S_{(A\vee B)} \cup \{A\}$ или для множества $S_{(A\vee B)} \cup \{B\}$.

Правила кванторов

$$(\forall)\ \frac{L \vdash S, \forall x/sA}{L \cup Const/s \vdash S_{\forall x/sA} \cup \{A[c/x]\}_{c \in Const/s}}$$

$$(\neg\forall)\ \frac{\vdash S, \neg\forall xA}{\vdash S_{\neg\forall xA}, \exists x \neg A}$$

$$(\exists)\ \frac{L \vdash S, \exists x/sA}{\ldots \mid L \cup \{c_i/s\} \vdash S_{\exists x/sA}, A[c_i/x] \mid \ldots} \qquad Const/s = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

$$(\neg\exists)\ \frac{\vdash S, \neg\exists xA}{\vdash S_{\neg\exists xA}, \forall x \neg A}$$

Смысл правила $(\forall)$ заключается в том, что если мы хотим снять квантор всеобщности, то необходимо указать набор всех индивидных констант, которые имеют тот же сорт s, что и подкванторная переменная x/s, и добавить их к языку. Формула $\forall x/sA$ замещается множеством всех формул $\{A[c/x]\}_{c \in Const/s}$, получаемых подстановкой всех возможных констант сорта s вместо переменной x. После первого случая добавления к языку $L \cup Const/s$ всех констант сорта s они уже не изменяются. То есть при их повторном введении в результате применения правила ($\forall$) к другим формулам с подкванторной переменной x/s имеет место $L = L \cup Const/s$.

Смысл правила ($\exists$) аналогичен предыдущему, но на этот раз дерево ветвится и потомками узла таблицы является не один, а множество узлов по числу индивидных констант сорта s. При этом нет необходимости добавлять к языку сразу все константы сорта s, а достаточно добавить $L \cup \{c_i/s\}$ лишь ту, на которую снимается квантор. Это очень важное замечание, т. к. служит лазейкой для работы с бесконечными предметными областями.

Правила литералов

Эти правила являются ключевыми в формализации аналитического метода анализа задач.

$$(P.1)\ \frac{Mod, Def \vdash S, P\mathbf{t}}{Mod \cup \{P\mathbf{t}\}, Def \vdash S_{P\mathbf{t}}},$$

при условии $P\mathbf{t} \notin Mod$ и $\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \notin Def$

$$(P.2)\ \frac{L, Mod, Def \vdash S, P\mathbf{t}}{L \cup L(A), Mod, Def \cup \{\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)\} \vdash S, P\mathbf{t}},$$

при условии $P\mathbf{t} \notin Mod$ и $\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \notin Def$

$$(\neg P.1)\ \frac{Mod, Def \vdash S, \neg P\mathbf{t}}{Mod \cup \{\neg P\mathbf{t}\}, Def \vdash S_{\neg P\mathbf{t}}},$$

при условии $\neg P\mathbf{t} \notin Mod$ и $\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \notin Def$

$$(\neg P.2)\ \frac{L, Mod, Def \vdash S, \neg P\mathbf{t}}{L \cup L(A), Mod, Def \cup \{\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)\} \vdash S, \neg P\mathbf{t}},$$

при условии $\neg P\mathbf{t} \notin Mod$ и $\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \notin Def$

$$(D)\ \frac{Def \cup \{\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)\} \vdash S, P\mathbf{t}}{Def \cup \{\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)\} \vdash S_{P\mathbf{t}}, A[\mathbf{t}/\mathbf{x}]}$$

$$(\neg D)\ \frac{Def \cup \{\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)\} \vdash S, \neg P\mathbf{t}}{Def \cup \{\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)\} \vdash S_{\neg P\mathbf{t}}, \neg A[\mathbf{t}/\mathbf{x}]}$$

$$(El)\ \frac{Mod \cup \{A\} \vdash S, A}{Mod \cup \{A\} \vdash S_A}$$

Если в ходе редукции цели мы пришли к атомарной формуле $P\mathbf{t}$, для предикатного символа которой нет определения вида $\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)$, т. е. два варианта дальнейшего построения дерева. В первом случае $(P.1)$ мы считаем, что дальнейшая редукция не является необходимой, т. к. истинностное значение формулы может быть установлено путем непосредственного соотнесения с фактическим состоянием мира. Поэтому мы добавляем формулу к множеству Mod. Во втором случае $(P.2)$ мы считаем необходимым редуцировать данную формулу и для этого принимаем определение предикатного символа $\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)$. Приняв его, мы должны расширить язык сортами, индивидными переменными, константами и предикатными символами, которые имеют вхождения в дефиниенс определения, т. е. в формулу A.

Смысл правил $(\neg P.1)$ и $(\neg P.2)$ аналогичен предыдущим.

Правила (D) и $(\neg D)$ — это замена предикатного символа на основании ранее принятого определения.

Правило (El) говорит, что если целевая формула А уже содержится в модельном множестве Mod, то ее можно удалить из множества целей.

Правила замыкания

$$(\varnothing.1)\ \frac{\vdash S, A, \neg A}{\varnothing}$$

$$(\varnothing.2)\ \frac{Mod \cup \{P\mathbf{t}, \neg P\mathbf{t}\} \vdash S}{\varnothing}$$

Смысл правил замыкания достаточно очевиден. Если мы пришли к противоречию, то ветвь дерева считается ***замкнутой*** и исключается из дальнейшего рассмотрения.

Ветвь дерева, конечный узел которой имеет вид $L, Mod, Def \vdash \varnothing$, будем называть ***завершенной***, поскольку к нему не применимы никакие правила редукции.

Будем говорить, что ***цель достижима***, если дерево редукций имеет хотя бы одну завершенную ветвь. ***Цель недостижима***, если все ветви дерева редукций замкнуты.

6. Модели

Моделью будем называть пару вида $M = \langle Mod, Def \rangle$, где

1. Mod — некоторое множество замкнутых атомарных формул или их отрицаний;
2. Def — множество определений;
3. Если $\forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \in Def$, то ни для каких термов $\mathbf{t}$ не верно, что $P\mathbf{t} \in Mod$ или $\neg P\mathbf{t} \in Mod$.

Определим отношение $M \vDash A$ — *«формула A истинна в модели M»*, где A не содержит свободных переменных.

1. $\langle Mod, Def \rangle \vDash P\mathbf{t} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \notin Def$ и $P\mathbf{t} \in Mod)$ или $(\forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \in Def$ и $\langle Mod, Def \rangle \vDash A[\mathbf{t}/\mathbf{x}])$
2. $\langle Mod, Def \rangle \vDash \neg P\mathbf{t} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \notin Def$ и $\neg P\mathbf{t} \in Mod)$ или $(\forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \in Def$ и $\langle Mod, Def \rangle \vDash \neg A[\mathbf{t}/\mathbf{x}])$
3. $M \vDash (A \& B) \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash A$ и $M \vDash B$
4. $M \vDash \neg(A \& B) \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \neg A$ или $M \vDash \neg B$
5. $M \vDash (A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash A$ или $M \vDash B$
6. $M \vDash \neg(A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \neg A$ и $M \vDash \neg B$
7. $M \vDash \forall x/sA \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash A[c/x]$ для каждой константы c/s
8. $M \vDash \neg \forall x A \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \exists x \neg A$
9. $M \vDash \exists x/sA \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash A[c/x]$ для некоторой константы c/s
10. $M \vDash \neg \exists x A \quad \Leftrightarrow \quad M \vDash \forall x \neg A$

7. Теорема адекватности

Теорема 1. *Пусть $L(Aim), \varnothing, \varnothing \vdash Aim$ — начальный узел дерева, а $L, Mod, Def \vdash \varnothing$ — конечный узел одной из завершенных ветвей. Тогда для всякой формулы $A \in Aim$ имеет место $\langle Mod, Def \rangle \vDash A$.*

Доказательство проводим индукцией по построению дерева.

Доказательство. Выделим ветвь дерева с конечным узлом $L, Mod, Def \vdash \varnothing$, и покажем, что для всякого узла $L', Mod', Def' \vdash S'$ этой ветви и всякой формулы $B \in S'$ имеет место $\langle Mod, Def \rangle \vDash B$.

Базис индукции

Так как узел $L, Mod, Def \vdash \varnothing$ является конечным, то тривиальным образом для каждой формулы $B \in \varnothing$ имеет место $\langle Mod, Def \rangle \vDash B$.

Индукционный шаг

Рассмотрим узел $L', Mod', Def' \vdash S', B$ в предположении, что для всех нижестоящих узлов наше утверждение выполняется.

Случай 1. Формула B имеет вид $\forall x/sD$ и к ней было применено правило $(\forall)$

$$\frac{L', Mod', Def' \vdash S', \forall x/sD}{L' \cup Const/s, Mod', Def' \vdash S'_{\forall x/sD} \cup \{D[c/x]\}_{c \in Const/s}}$$

Тогда непосредственно следующий узел для всех $c \in Const/s$ содержит формулы вида $D[c/x]$, и по индуктивному опущению для каждой из них имеет место $\langle Mod, Def \rangle \vDash D[c/x]$. Отсюда по определению истинности в модели получаем $\langle Mod, Def \rangle \vDash \forall x/sD[c/x]$.

Случай 2. Формула B имеет вид $\exists x/sD$ и к ней было применено правило $(\exists)$.

$$\frac{L', Mod', Def' \vdash S', \exists x/sD}{\ldots \mid L' \cup \{c_i/s\}, Mod', Def' \vdash S'_{\exists x/sD}, D[c_i/x] \mid \ldots}$$

Тогда анализируемой ветви дерева принадлежит один из непосредственно следующих узлов вида $L' \cup \{c_i/s\}, Mod', Def' \vdash S'_{\exists x/sD}, D[c_i/x]$ для некоторой константы c_i/s. По индуктивному допущению имеет место $\langle Mod, Def\rangle \vDash D[c_i/x]$. Отсюда по определению истинности в модели получаем $\langle Mod, Def\rangle \vDash \exists x/sD$.

Случай 3. Формула В имеет вид $P\mathbf{t}$ и к ней было применено правило $(P.1)$ при выполнении условия $P\mathbf{t} \notin Mod$ и $\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \notin Def$

$$\frac{Mod', Def' \vdash S', P\mathbf{t}}{Mod' \cup \{P\mathbf{t}\}, Def' \vdash S'_{P\mathbf{t}}}$$

Поскольку $Mod' \cup \{P\mathbf{t}\} \subseteq Mod$ то $\langle Mod, Def\rangle \vDash P\mathbf{t}$.

Случай 4. Формула В имеет вид $P\mathbf{t}$ и к ней было применено правило $(P.2)$ при выполнении условия $P\mathbf{t} \notin Mod$ и $\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \notin Def$

$$\frac{L', Mod', Def' \vdash S', P\mathbf{t}}{L' \cup L(A), Mod', Def' \cup \{\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)\} \vdash S', P\mathbf{t}}$$

По индуктивному допущению $\langle Mod, Def\rangle \vDash P\mathbf{t}$.

Случай 5. Формула B имеет вид $\neg P\mathbf{t}$ и к ней было применено правило $(\neg P.1)$. Рассматривается аналогично случаю 3.

Случай 6. Формула B имеет вид $\neg P\mathbf{t}$ и к ней было применено правило $(\neg P.2)$. Рассматривается аналогично случаю 4.

Случай 7. Формула B имеет вид $P\mathbf{t}$ и к ней было применено правило (D).

$$\frac{L', Mod', Def' \cup \{\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)\} \vdash S', P\mathbf{t}}{L', Mod', Def' \cup \{\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A)\} \vdash S'_{P\mathbf{t}}, A[\mathbf{t}/\mathbf{x}]}$$

По индуктивному допущению имеет место $\langle Mod, Def\rangle \vDash A[\mathbf{t}/\mathbf{x}]$. Поскольку $Def' \cup \{\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \subseteq Def$, то $\forall\mathbf{x}(P\mathbf{x} \equiv A) \in Def$, и по определению истинности в модели получаем $\langle Mod, Def\rangle \vDash P\mathbf{t}$.

Случай 8. Формула B имеет вид $\neg P\mathbf{t}$ и к ней было применено правило $(\neg D)$. Рассматривается аналогично случаю 7.

Остальные случаи для логических связок, кванторов $(\neg\forall)$, $(\neg\exists)$ и (El) тривиальны. $\square$

8. Заключение

Построенное исчисление является формализацией проблемы решения задач как последовательного уточнения предикатов и их редукции к подзадачам. В результате такой редукции мы приходим к моделям, которые либо являются решением задачи, либо содержат указание на то, как следует изменить текущее состояние мира, чтобы задача была решена.

Мы ограничились рассмотрением моделей с конечными индивидными областями, поскольку ориентировались в первую очередь на практические задачи, где такие ограничения оправданны. В то же время предложенный метод позволяет решать задачи, относящиеся и к бесконечным предметным областям. Это возможно в тех случаях, когда в ходе построения дерева редукции не применяется правило ($\forall$). Лишь оно может привести к узлу, содержащему бесконечное множество целевых формул по числу констант, именующих бесконечное множество индивидов предметной области. Если же это правило не применяется, то все узлы дерева редукции являются конечными объектами. Бесконечными могут быть лишь ветвления дерева в результате применения правила ($\exists$), но это не является препятствием, поскольку для решения задачи достаточно найти хотя бы одну завершенную ветвь, а это возможно методом поиска вглубь.

Все, кто знаком с методами логического программирования на языке Пролог, могли обратить внимание на то, что представленное исчисление редукций в достаточно общем виде формализует методологию написания логических программ. А именно, планирование и написание логических программ по методу сверху-вниз. Как и в исчислении редукций, программист дает определения предикатам, вводит в рассмотрение индивиды различных сортов, расширяет язык новыми предикатами, чтобы в дальнейшем дать определения уже им, как и в исчислении редукций, использует смысл логических связок для того, чтобы разбить программу на подпрограммы. Отличия лишь в деталях, связанных с эффективной реализацией на компьютере. Для этого в чистом Прологе используются Хорновы формулы, мы же взяли полный язык логики предикатов первого порядка. Множество определений, которые принимаются в ходе построения дерева редукций, является прямым аналогом логической программы, которая в будущем может использоваться для решения подобных задач. Таким образом, изначально творческая задача переходит в разряд рутинных, которые будут решаться стандартным образом на основе набора однажды принятых определений.

Литература

[1] *Декарт Р.* Правила для руководства ума // *Декарт Р.* Соч.: в 2 т. Т. 1. М.: Мысль, 1988. С. 77–153.

[2] *Непейвода Н.Н., Свириденко Д.Т.* К теории синтеза программ // Математическая логика и теория алгоритмов М.: Наука, 1982. С. 159–175.

[3] *Пойя Дж.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975. 464 с.

[4] *Пойя Дж.* Математическое открытие. М.: Наука, 1976. 448 с.

[5] *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 278 с.

[6] *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991. 224 с.

[7] *Смирнов В.А.* Творчество, открытие и логические методы поиска доказательства // Логико-философские труды В.А. Смирнова. М.: Эдиториал УРСС, 2001. С. 438–447.

[8] *Уинстон П.* Искусственный интеллект. М.: Мир, 1980. 520 с.

[9] *Целищев В.В., Бессонов А.В.* Две интерпретации логических систем. Новосибирск: Наука, 1979. 269 с.

V.I. Shalack

Analytical Approach to Problem Solving

Shalack Vladimir Ivanovich
Department of logic, Institute of Philosophy of Russian Academy of Sciences
12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation
E-mail: shalack@gmail.com

The work is devoted to the logical analysis of the problem solving. Typically, in each task we highlight the conditions and goals that we have to find or build. In this case the solution of the problem is seen as a kind of deduction from goals to the conditions. This representation of problems and their solutions is too narrow. In actual practice, a task or goal is often formulated in quite general terms as a wish. For example, the task to build a railway between the two cities. Sufficient conditions for the solution of this problem are initially unclear and should be found. For this kind of problems their solution can be represented as a gradual refinement of goals and their reduction to a simpler sub-goals. The methods by which we produce clarification of goals, we took from the theory of definitions. In this paper we construct a calculus in the form of analytical tables, which allows us to represent the whole process algorithmically.

Keywords: Problem solving, logical reduction, analytical tables, theory of definitions

References

[1] Dekart, R. "Pravila dlya rukovodstva uma" [Rules for the Direction of the Natural Intelligence], in: R. Dekart, *Sochineniya v dvukh tomakh* [Works in two volumes], T. 1. Moscow: Mysl', 1988, pp. 77–153. (In Russian)

[2] Nepeivoda, N.N., Sviridenko, D.T. "K teorii sinteza programm" [To the theory of program synthesis], in: *Matematicheskaya logika i teoriya algoritmov* [Mathematical logic and theory of algorithms]. Moscow: Nauka, 1982, pp. 159–175. (In Russian)

[3] Poiya, Dzh. *Matematika i pravdopodobnye rassuzhdeniya* [Mathematics and plausible reasoning]. Moscow: Nauka, 1975. 464 pp. (In Russian)

[4] Poiya, Dzh. *Matematicheskoe otkrytie* [Mathematical discovery]. Moscow: Nauka, 1976. 448 pp. (In Russian)

[5] Saati, T. *Prinyatie reshenii. Metod analiza ierarkhii* [The Analytic Hierarchy Process]. Moscow: Radio i svyaz', 1993. 278 pp. (In Russian)

[6] Saati, T., Kerns, K. *Analiticheskoe planirovanie. Organizatsiya sistem* [Analytical Planning; The Organization of Systems]. Moscow: Radio i svyaz', 1991. 224 pp. (In Russian)

[7] Smirnov, V.A. "Tvorchestvo, otkrytie i logicheskie metody poiska dokazatel'stva" [Creativity, discovery and logical methods for proof search], in: *Logiko-filosofskie trudy V.A. Smirnova* [The logical and philosophical works of V.A. Smirnov] Moscow: Editorial URSS, 2001, pp. 438–447. (In Russian)

[8] Winston, P. *Iskusstvennyi intellekt* [Artificial intellegence], Moscow: Mir, 1980. 520 pp. (In Russian)

[9] Tselishchev, V.V., Bessonov, A.V. *Dve interpretatsii logicheskikh sistem* [Two interpretations of logical systems], Novosibirsk: Nauka, 1979. 269 pp. (In Russian)

Логические исследования
2017. Т. 23. № 1. С. 140–150
УДК 16

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 1, pp. 140–150
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-1-140-150

История логики
History of Logic

S. Garin

Minimal Categorical System and Predication Theory In Porphyry

Garin Sergei
Kuban State University
149 Stavropolskaya St., Krasnodar, 350040, Russian Federation
E-mail: svgarin@gmail.com

The article considers some problematic aspects of Porphyry's typology of Aristotle's categories and the theory of predication. Minimal (ἐλαχίστος) class of categories in Porphyry is revealed. The work has shed some light on the opposition between *explanation* and *description* (ἐξηγητικός / ὑπογρᾰφικός) within the framework of ancient categorical logic. A fourfold pattern of predication theory in Porphyry is described. The study aims to illuminate the development of Porphyry's predication theory towards the archaic doctrine of quantifiers. Particular attention is paid to Porphyry's account of semantic relation between sets. The paper represents Porphyry's nine kinds of class / item relationships. The article focuses on the awakening of academic interest to the logical heritage of Porphyry.

Keywords: history of logic, categories, predication, Porphyry, Aristotle

If Aristotle's theory of language and logic became the steady subject of intense study and scholarly interest of many researchers [1, 6, 7, 9], the same cannot be said about the work of the outstanding logician and philosopher, *Porphyry of Tyre*. Key works of Porphyry have come to the attention of scholars only in the XX century [2]. A relatively complete edition of the fragments of the Tyrian author was published only in 1993 [8]. The main scholarly interest related to Porphyry is connected either with his attitude to the heritage of Plotinus [4] and in a broad sense, to the Neo-Platonic tradition, or with his critical position towards Christianity. And in both cases, these studies are beyond the scope of logic. Some significant tractates of Porphyry (e.g. so-called "*minor*" commentary[1], having a Socratic question and answer form) have not yet been translated to Russian, and Porphyry's logical doctrine beyond his "Εισαγωγή" has not received sufficient attention in the logical writings of Russian scholars. However, as we think, Porphyry — is one of the overt architects of ancient logic and semantics, the author, who predetermined the subsequent vectors of development of these sciences for centuries.

In this article we will take into consideration some aspects of Porphyry's categorical doctrine and theory of predication in his commentary approach to Aristotle's logic. The ideas of Porphyry, as discussed in this article, undoubtedly have origins in the logic of Aristotle. However, where we have only a cursory mention and sketch ideas in Aristotle, in Porphyry we see a detailed logical argument.

The key to Porphyry's logical tractates are undoubtedly his "Commentaries" on the "Categories" of Aristotle. We know at least several of his treatises dedicated to this subject; the only extant to us, in addition to the "Εισαγωγή" is the so-called "*minor*" commentary, having a question and answer form.

In his minor commentary on the "Categories" [3], Porphyry, explaining logical and semantic aspects of the interpretation of general terms, expounds that in addition to the traditional division into ten types *of categories*, there is also a so called "minimal" (ἐλαχίστον) *fourfold division*:

1) universal substance (ἢ οὐσία καθόλου),
2) particular substance (ἢ οὐσία ἐπὶ μέρους),
3) universal accident (ἢ συμβεβηκότα καθόλου),
4) particular accident (ἢ συμβεβηκότα ἐπὶ μέρους).

This division, due to its generality, has a descriptive rather than definitive character. It is noteworthy that Porphyry's expression here does not contain the term "category" for the description of these four reduced terms of so-called *ontological square*:

[1] "Πορφυριου εις τας αριστοτελους κατηγοριας κατα πευσιν και αποκρισιν".

> Εἷς ἐλαχίστην μὲν οὖν διαίρεσιν γενῶν διέλ οιμ΄ ἂν τὰ ὄντα καὶ τὰς τούτων σημαντικὰς φωνὰς τὴν εἰς τέσσαρα... [3, p. 71].
>
> The smallest number of classes into which I could divide beings and the words that signify them is four...
> (Here and after English translation is by S. K. Strange).

Instead of "categories", we see an extremely important Porphyry concept for all subsequent logic and linguistic philosophy — "σημαντικὰι φωναι".

Following Aristotle, Porphyry thinks logically: if categories cannot be defined in terms of a higher generic level, "for there can be no higher genus above substance or accident", the definitive logic does not appear to be applicable to them. As a consequence, instead of definitive concepts, the theory involves so-called *hyphographical* (ὑπογρᾰφικός), i.e. descriptive means. This aspect had raised a significant number of difficulties in the commentary tradition, which has been reflected in a special question of Porphyry's tractate. In response, Porphyry contrasts the *definitive*, or, literally speaking, *exegetical* interpretation to *descriptive*, hyphographical:

> Ὅτι ἀντὶ τῶν ὀνομάτων τούτων τοὺς ἐξηγητικοὺς λόγους ἔλαβεν καὶ οἷον ὑπογραφικούς [3, p. 71].
>
> Because he used instead the accounts that serve to explain these terms, that is, their descriptive accounts.

It is noteworthy that other authors also share the opposition of definitive, i.e., exegetical and descriptive logic (ἐξηγητικός / ὑπογρᾰφικός), commenting on the "Categories". For example, Simplicius [5], tackling the question of the nature of homonyms, opposes the *logos of essence* "λόγος τῆς οὐσίας" to the *logos of name*, i.e., definitive and descriptive accounts. According to Simplicius, objects can be linguistically reflected in both *nominal* and *conceptual function*; the latter, in its turn, can be descriptive or definitive. We see in Simplicius λόγος τόν ὁριστικὸν [5, p. 29], whilst in Porphyry — ἐξηγητικ-ός. Hyphographical logos, being the description, which allows us to explain features of generic terms, including the highest gender and other problematic objects — individuals. On the contrary, the explanation, in accordance with this approach, has a *definitive function* — it logically determines generic and specific characteristics of the object.

In looking at ways of defending the minimal division of categories, Porphyry indicates that it is possible to provide an even simpler version, consisting only of *two* parameters — the *substance* and the *accident*:

Ὅτι ἡ μὲν ἀνωτάτω καὶ πρώτη γένοιτ᾽ ἂν εἰς δύο, εἰς οὐσίαν καὶ συμβεβηκός [3, p. 71]

Because the first and highest division is into two, namely substance and accident.

However, as Porphyry says, substances and accidents cannot be conveyed without expressing them as either universal or particular. Porphyry thinks that *simple* substances don't exist. Similarly, we know that there are no *simple objects* outside the facts in early Wittgenstein's ontology. Substances, according to Porphyry, are given either universally, at the level of general terms (logical objects), or individually, at the level of physical objects, therefore, the fourfold division is the most minimal one.

Porphyry transforms these categories into the already mentioned concept of σημαντικὰς φωνὰς, which in many aspects determined the subsequent motion of logic from ontology towards the theory of meaning and predication.

The next block of Porphyry's arguments deals with the ontological compatibility of semantic categorical components — substance and accidental (attribute). Porphyry explains the ontological differentiation:

ἡ οὐσία οὐκ ἂν γένοιτο συμβεβηκὸς οὐδὲ τὸ συμβεβηκὸς οὐσία.

A substance cannot come to be an accident nor an accident a substance.

Ευμβεβηκέναι μὲν γὰρ τὸ συμβεβηκὸς δύναται τῇ οὐσίᾳ, εἶναι δὲ οὐσίαν συμβεβηκὸς ἀδύνατον ἢ τὸ συμβεβηκὸς εἶναι οὐσίαν [3, p. 71].

For an accident can be an accident of a substance, but a substance cannot be an accident nor can an accident be a substance.

Thus, we get a conclusion that an accident can only exist in the substance, and as we consider accidental *as such*, it is *not a substance.*

Porphyry clarifies the specified Aristotelian thesis with the following argument: *white* is an accidental attribute of the body, when we say, "the body is white". But "white" and "body" *per se* are not the same thing, "but the white qua white is not the same as body" [3, p. 73] (in connection with this aspect, the issue of *iteration* of accidental — *this white* as accidental attribute of white, raised in the recent logical literature).

Ontology and semantics of universals in Porphyry are connected with the thesis that universal may not be a part of the individual — ἣ καθόλου οὐκ ἂν εἴη τοῦ ἀτόμου μέρος.

In explaining semantic aspects of Aristotle's logic in a new "descriptive" framework, Porphyry develops categorical typology. As Porphyry suggests, in Aristotle's logic, the object can act in the following modifications:

a) being in a subject (τό τε ἐν ὑποκειμένῳ εἶναι),

b) being said of a subject (τὸ καθ᾽ ὑποκειμένου λέγεσθαι) [3, p. 73].

Next Porphyry forms its negative modifications:

a^1) not being in a subject (μὴ ἐν ὑποκειμένῳ εἶναι),

b^1) not being said of a subject (τὴν καθ᾽ ὑποκειμένου μὴ λέγεσθαι).

Porphyry applies these four kinds to the pure, unmixed types of division.

One of the darkest aspects in Aristotle's "Categories" is probably the doctrine of logical, semantic and ontological *location* of accident in its relation to the substance, and grammatically speaking — to the subject of statement. As it was aforementioned, according to Aristotle, accidental cannot be the subject. With regard to accidental as such, which is not the subject, Porphyry writes the following:

> Ὅτι γενέσθαι μὲν καὶ ὑποστῆναι τὰ συμβεβηκότα ἐν τῇ οὐσίᾳ δύναται, καθόσον δὲ συμβεβηκός ἐστι καὶ ἐπινοεῖται τὸ συμβεβηκός, οὐκ ἂν εἴη αὐτὸ τοῦτο οὐσία [3, p. 73].

> Because accidents can come to be in substance and exist in substance, but insofar as they are accidents and are conceived as such, they cannot be substance.

Porphyry constructs analogy, according to which the expressions ἄνθρωπον εἰπεῖν ἢ ζῷον λογικὸν θνητόν, “something is a man” and “something is a mortal rational animal” are semantically identical as well as the expressions “accident” and “being in a subject”. According to Porphyry, if something is in a subject, it is accidental, εἴ τί ἐστιν ἐν ὑποκειμένῳ, ἐκεῖνο συμβεβηκός ἐστιν [3, p. 73].

It is notorious that the Aristotelian concept of *subject* (ὑποκείμενον),rather pertains to the logical than grammatical reality, although in some cases, it may be interpreted in grammatical terms. This duality of the subject was reflected in the commentary tradition on the “Categories”. The modern Russian-speaking reader, opening the “Categories”, “Εισαγωγή” and Porphyry’s “Commentary”, and encountering the term “subject”, will probably be only looking for a grammatical meaning of the word. As it is indicated in modern Russian,the concept of “subject” has lost all the extra-grammatical meanings of objects’ spatial localization.

The grammatical interpretation of the term ὑποκείμενον leads to serious inconsistencies and difficulties in explaining not only the “Categories”, but also the all-subsequent ancient, especially Neoplatonic logic. The English translation of Aristotle’s term as the “subject” considerably simplifies matters, because it stores the original polysemy of the term. In fact, Aristotle uses ὑποκείμενον in connection with the hierarchical arrangement of objects “under” and “over”. What we understand by this is not only the spatial distribution of physical objects but also a logical hierarchy of entities and attributes.

It is necessary to distinguish between grammatical, ontological and logical fore shortenings of the term ὑποκείμενον. The subject in Aristotle’s logic is a “container”, a substratum of qualities and attributes of the object. It has an ontological, rather than linguistic projection, as the concept of the predicate, which must be distinguished from the modern grammatical term. The Aristotelian predicate, to some extent, does not coincide with the class of predicates of sentences, and rather is some semantic expression towards being.

The difficulty in this case is that, as Porphyry writes:

> ἀλλ᾽ εἰ τό συμβεβηκός ἐν ὑποκειμένῳ ἐστίν, ἡ οὐσία ἑτέρα οὖσα τοῦ συμβεβηκότος εἴη ἂν οὐκ ἐν ὑποκειμένῳ [3, p. 73].
>
> But if an accident is something that is in a subject, substance, since it is something different from accident, will not be in a subject.

However, the question that may be raised here is how the properties of a substance can be linguistically expressed (in language)? The answer is obvious — to place substance to the position of the subject (namely in the subject) and ascribe the attributes placed in the predicate.

Porphyry here develops the doctrine of the *definitive location* of the substance (ἡ οὐσία)

> ὥστε εἴ τις οὐσία ἐστίν, ἐκείνη ἂν οὐκ ἐν ὑποκειμένῳ εἴη [3, p. 73].
>
> Hence if something is a substance, it is not in a subject.

It is interesting that Aristotle and Porphyry here invent the method and the topology of the *semantic presence* of οὐσία.

Furthermore, in developing the doctrine of predication towards the archaic doctrine of quantifiers, Porphyry adds that if something is *universal*, it is necessarily said of a subject. Thus, if an individual has a property "to be universal", it is a predicate. This characteristic has a negative modification — if something pertains to the particular, it is not said of a subject and therefore it doesn't belong to the class of predicates. Thus, Porphyry says that we have four possible *combinations of predication*: a) not being in a subject — substance, τῆς μέν οὐσίας τό ἐν ὑποκειμένῳ μὴ εἶναι, b) being in a subject — accident, τοῦ δὲ συμβεβηκότος τὸ ἐν ὑποκειμένῳ εἶναι, c) being said of a subject — universal, καὶ τοῦ μὲν καθόλου τὸ καθ ῾ὑποκειμένου λέγεσθαι, d) not being said of a subject — particular, τοῦ δὲ ἐπὶ μέρους τὸ καθ᾽ ὑποκειμένου μὴ λέγεσθαι [3, p. 73].

Combining in turn all the parameters examined above, Porphyry raises the question: how it is possible to define, for example, the universal substance in the fourfold matrix of predication? In response, he points out that universal substance is characterized by having the following:

a) predicative function,

b) *logical topos* outside the subject.

Actually Porphyry sets the two arguments for the characteristic function of "universal substance". The predicative function of universal substance comprises the trivial feature that it can act as a predicate and as a result, can be said of a subject. The logical *topos* of universal substance is conveyed by the fact that it is a substance and located outside the logical subject. Further, within the four-dimensional system of predication, Porphyry sets the parameters for universal accident. He indicates that universal accidental attribute can be described as what is said of a subject (since it is universal), and also that, being accidental, is in a subject. Thus, a universal as discussed above, has a predicative function.

Another aspect relates to the fact that universal, placed in the predicate area is necessarily *logically wider* than what is ascribed to it in the subject. Here Porphyry, following Aristotle, essentially uses the traditional logical concept of universal affirmative propositions, without taking into account their special subclass of general *emit statements*, having the predicate, which is not logically wider than the subject, and, as a consequence, the proposition is not distributed.

Continuing the four-dimensional logical theory of predication, Porphyry raises the question about the characteristics of the *individual substance* within the scopes of this system. In Porphyry's logic, individual substance is determined by the two *negative parameters*: "not being said of a subject and not being in a subject" [3, p. 73]. If something is not universal, but particular, it can't be *said of a subject*, but as far as it is a substance and not accident, it cannot be *in a subject.*

Then the question arises, how to describe a *particular accidental attribute* (τό μερικόν συμβεβηκός) in this matrix? This option as in the case considered above, is determined by the twofold function. So, since there is something particular, it cannot be said of a subject, and as far as it is accidental, it can be only in a subject. Thus, we see that

Porphyry describes these logical-categorical aspects within two options — *predicative* and *topological*.

However, careful analysis of these categories obviously shows that there are a number of difficulties in this theory, which Porphyry foresaw and brought in the special topics of the commentary. In particular, the question arises, what is the *denotata* of the expression "items are said of a subject, but are not in a subject?" Porphyry goes here from the predicate function to the set of individuals, responding that the answer is "class of universal substances". Answering the question of the disciple, Porphyry constructs a twofold matrix of *predication* and *logical topos*: if it is universal — it is a predicate, i.e., said of a subject, and at the same time — a substance that is not in a subject.

However, another question arises: why is the inhesion of the universal attribute to an object denoted by the predicative function "said of", whereas accidental attribute — through the verbal function "is"? Porphyry puts forward the problem specifically:

> Διὰ τί οὖν τὰ μὲν καθόλου ἔφης καθ᾽ ὑποκειμένου λέγεσθαι, τὰ δὲ συμβεβηκότα ἐν ὑποκειμένῳ εἶναι; τί γὰρ βούλεται τὸ τὰ μὲν λέγεσθαι φάναι σε, τὰ δὲ συμβεβηκότα εἶναι; [3, p. 75].
>
> Why did you say that universals are said of a subject, but that accidents are in a subject? What do you mean by speaking of the former as 'said of, but of accidents as "being"?

Porphyry's answer is interesting because it moves away from the direct interpretation of the ontological aspects of categories, referring to the fact that these issues are "too profound" and beyond the capacities of the beginner's mind, as well as in "Εισαγωγή" (1,13–14) Porphyry refuses from the discussion of the ontological status of universal substances.

Considering the peculiarity of predication, namely the criteria of a predicate's inhesion to a subject, Porphyry, actually develops a doctrine of semantic relation between sets. Answering the question "Πόσα οὖν σημαινόμενα τοῦ ἔν τινι κατηρίθμησας" [3, p. 77], i.e. "how many significations of 'being in something' do you count?" Porphyry indicates nine kinds of relationships between classes.

Being in a place (τὸ ὡς ἐν τόπῳ), being in a container (τὸ ὡς ἐν ἀγγείῳ), the part being in the whole (τὸ ὡς ἐν ὅλῳ τὸ μέρος), the whole being in the parts (τὸ ὡς ἐν τοῖς μέρεσι), the species being in the genus (τὸ ὅλον καὶ τὸ ὡς ἐν τῷ γένει), the genus being in the species (τὸ εἶδος καὶ τὸ ὡς ἐν τῷ εἴδει), being in a goal (τὸ γένος καὶ τὸ ὡς ἐν τέλει), being in what has control (τὸ ὡς ἐν τῷ κρατοῦντι), and the form being in the matter (τὸ ὡς ἐν τῇ ὕλῃ τὸ εἶδος) [3, p. 78]. Thus, the relationship between the terms of an affirmative proposition in Porphyry's theory of predication may pertain to one of these nine types. It should be noted that Aristotle distinguished only two of these nine types of relations, namely, the relation of the part being in the whole, and being in a place that contains, in spite of the commentator nature of Porphyry's thought, a very significant innovative component.

Porphyry develops his doctrine of predication, not only in terms of the relationship between sets, but also in the context of different *predicate frameworks*. Firstly, predication, according to Porphyry, can act as the nominal function, and secondly, in object-denotative function. There is also a third combined way — both in nominal, and denotative functions.Here we have a pre-Fregean sketchy attempt to build a theory of intentional (denotative-designative) features of language. Porphyry considers here a synthetic type of predication, when denotative and nominal components equally relate to the subject of proposition.In this case, if something is predicated to the subject, both nominal and denotative functions are inherent to the subject.

These aspects of the Porphyry's logic, in our opinion, require a separate comprehensive study.

References

[1] Back, A. *Aristotle's theory of predication.* London: Brill, 2000. 347 pp.

[2] Bidez, J. *Vie de Porphyre.* Gent: OlmsVerlag, 1913. 166 pp.

[3] Busse, A. *Commentaria in Aristotelem Graeca.* Vol. 4.1. Berlin: Reimer, 1887. 183 pp.

[4] Johnson, A. P. *Religion And Identity In Porphyry Of Tyre. The Limits Of Hellenism In Late Antiquity.* Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 374 pp.

[5] Kalbfleisch, K. *Commentaria in Aristotelem Graeca*. Vol. 8. Berlin: Reimer, 1907. 575 pp.

[6] Malink, M. *Aristotle's Modal Syllogistic*. Harvard: Harvard University Press, 2013. 366 pp.

[7] Rijk, L. M. *Aristotle: Semantics and Ontology*. Koln: Brill, 2002. 500 pp.

[8] Smith, A. *Porphyrii Philosophi Fragmenta*. Leipzig: Teubner, 1993. 654 pp.

[9] Woods, J. *Aristotle's Earlier Logic*. Milton Keynes: College Publications, 2014. 274 pp.

Логические исследования
2017. Т. 23. 1. С. 151–176
УДК 16

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 1, pp. 151–176
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-1-151-176

A.M. Pavlova

What Hamblin's Formal Dialectic Tells About the Medieval Logical Disputation[1]

Pavlova Alexandra Mikhailovna
Institute of Philosophy, Saint Petersburg State University
5 Mendeleevskaya Liniya, St. Petersburg, 199034, Russian Federation
E-mail: alexandra22@mail.ru

In this paper we reconstruct a famous Severin Boethius's reasoning according to the idea of the medieval obligationes disputation mainly focusing on the formalizations proposed by Ch. Hamblin. We use two different formalizations of the disputation: first with the help of Ch. Hamblin's approach specially designed to formalize such logical debates; second, on the basis of his formal dialectics. The two formalizations are used to analyze the logical properties of the rules of the medieval logical disputation and that of their formal dialectic's counterparts. Our aim is to to show that Hamblin's formal dialectic is a communicative protocol for rational agents whose structural rules may differ, thus, varying its normative character. By means of comparing Hamblin's reconstructions with the one proposed by C. Dutilh-Novaes we are able to justify the following conclusions: (1) the formalization suggested by Hamblin fails to reconstruct the full picture of the disputation because it lacks in some the details of it; (2) Hamblin's formal dialectic and the medieval logical disputation are based on different logical theories; (3) medieval logical disputation, represented by the formalization of C. Dutilh-Novaes, and the two ones of Hamblin encode different types of cognitive agents.

Keywords: formal dialectics, game, medieval disputes of obligationes, dialogue logic, argumentation, Hamblin, belief revision

Introduction

The study of the medieval logical disputation lies in between two different areas of research, namely: the history of logic and some modern trends in logic used for the reconstruction of the disputation. One of

[1]The research is supported by the Russian Foundation for Humanities, project № 14-03-00650.

these trends is associated with the development of the logical game theory. A weighty contribution to them both was made by an Australian logician Charles Hamblin who tried to model a medieval logical disputation with the help of a specially modified version of his own logical system called 'the formal dialectic'. He describes his system, first presented in the book *Fallacies*, published in 1970, as follows:

> Dialectic, whether descriptive or formal, is a more general study than Logic; in the sense that Logic can be conceived as a set of dialectical conventions. It is an ideal of certain kinds of discussion that the rules of Logic should be observed by all participants, and that certain logical goals should be part of the general goal [9].

Among the distinguishing features of the dialectical disputation that makes it different from the formal deduction one should mention the number of participants, namely more than one, and the existence of a functional communication protocol for those participants[2] that can be presented in the game-theoretical form [13]. In chapter 8, called 'Formal Dialectic', of the *Fallacies*, Ch. Hamblin considers the disputations *de obligationibus*, or simply obligationes, as obligation games. On the basis of the proposed system he gives formalisation of the two main types of disputations *de obligationibus*, namely: the standard one, described by Burley, and the alternative one of William of Sherwood.

Although, the obligation game is claimed to represent a formalization of the medieval disputation *de obligationibus*, there still remains an issue with respect to its adequacy. In the present paper we draw a comparison between Ch. Hamblin's disputations along with his system of formal dialectic to the medieval disputations *de obligationibus* as they are described in contemporary literature. We take a modern reconstruction of that medieval disputation for the comparison because formal systems can be correctly compared to formal systems only, but not to informal conceptions, once formal criteria are used, such as truth values, inference rules etc. We can formulate our subject matter in a form of a question whether the obligation games, as a particular case of the system of formal dialectic, can be considered a satisfactory and

[2]Sometimes those participants are called *'agents'*.

adequate formalization of the medieval disputation *de obligationibus*; or whether it lacks or corrupts some of the essential features of the medieval disputation.

However, being formulated as is shown above this problem would be of interest merely for the historians of logic. That is why it is necessary to clarify the incentive that underlies the analysis to be presented in this article. The paper's objective is to show that Hamblin's formal dialectic is a communicative protocol for rational agents whose structural rules may differ, thus, varying its normative character. For instance, in the paper we use classical propositional logic as structural rules following [9]. Furthermore, obligation game proposed by Hamblin to model medieval disputation is merely a restricted variant of formal dialectic which we claim to be a sort of cognitive game. We try to justify here the claim that formal dialectic is a more general theory than logic incorporated by the players. In the cours of the paper we reveal some features of both formal dialectic and medieval disputation de obligationibus. This requires the analysis of the roles that cognitive agents play in the systems in question. We use three main criteria:[3] that we use to explain some differences between formal dialectic and medieval disputations: (1) epistemic, (2) deductive and (3) goal-oriented (or actional and dynamic) [15]. Truth can represent both epistemic and deductive aspects of agents. As an epistemic criterion it shows what agents can know or/and believe in, which is related to some semantics. However, a semantic model corresponds to some specific set of inference rules that agents may use, and thus, it is related to deductive parameters. As far as rules of interaction are concerned, they influence the type of a system that a dialogue or a dispute represents [19], as it determine the formulae that might be inferred in its course. Thus, they can be associated with deductive competences of agents. At last, additional terms and conditions might partially take the shape of agents' goals and intentions so we associate those conditions with action (goal-oriented) elements of a cognitive agent.

[3]We we use the term 'intellectual competences' of agents to refer to those criteria.

This will allow us to show how the difference in those basic principles that we shall find in the course of our comparison between the medieval disputation *de obligationibus* and its formalization presented by Ch. Hamblin together with his own system of formal dialectic can effect those basic notions. At the same time we shall see whether those systems encode one and the same type of agent or different ones. By the type of agents we understand differences in their cognitive presumptions influencing the reasoning and actions. In the paper, we claim that the formal dialectic and medieval disputations presuppose different types of agents.

With the general aim formulated we can identify some intermediate tasks, which accordingly define the structure of the present paper, as follows:

1) give a brief overview of the main concepts and rules of the medieval disputations *de obligationibus* and their formal representation;

2) reconsider and discuss the rules for Hamblin's obligation games which is presented by Ch. Hamblin as a formalization of the medieval disputation;

3) have a look at the basic elements of Hamblin's system of formal dialectic from a general perspective;

4) and finally, compare Hamblin's system of formal dialectic to the medieval disputations *de obligationibus.*

To illustrate our analysis we shall discuss an example based on the treatise De Hebdomadibus by Boethius [2]. For the simplicity we leave out some details and take only the following argumentation:

> Things which exist are good. For the common view of the learned holds that everything which exists tends toward good. But everything tends toward its like. Therefore, the things which tend toward good are themselves good.
>
> But we have to ask how they are good, by participation or by substance?
>
> If by participation, they are in no way good in themselves. For what is white by participation is not white in itself in virtue of the fact that it itself

has being. And the same applies to other qualities. Therefore, if they are good by participation, they are in no way good in themselves. Therefore, they do not tend toward good. But that was granted. Therefore, they are not good by participation but by substance.

With the goals set, it is necessary to specify the following terms:

- by disputation *de obligationibus* we understand a particular kind of medieval logical disputation represented in treatises of Walter Burley, Richard Kilvington and Roger Swynesed and which is discussed in section 1;
- *medieval logical disputation*, i.e.,a general term used for the genre of medieval disputations;
- *obligation game*, i.e., the system specificly proposed by Ch. Hamblin to formalise the disputation *de obligationibus*;
- *the system of formal dialectic* (or simply *formal dialectic*), i.e., a system of regulated dialogues or family of dialogues with 'at least two participants who speak in turn in accordance with a set of rules or conventions' [9, p. 255] that is aimed at exceeding 'the bounds of Formal Logic; to include features of dialectical context within which arguments are put forward [9, p. 254].

1. What is Disputation *de Obligationibus*?

In this section we give an overview of the disputations *de obligationibus* and their history. First of all, it is believed that the scholastic theories on obligations were inspired by Aristotle's *Topics* and undergone some changes in the XIV^{th} century. One should distinguish the theory proposed by Walter Burley known as *antiqua responsio* and those of Richard Kilvington and Roger Swyneshed known as *nova responsio*. The latter treat obligations in epistemic terms which makes, as C. Dutilh-Novaes suggests in [6], it possible to consider those disputations as a theory of *belief revision* or *counterfactuals*. In this article we shall concentrate on the obligationes theory of Burley [4], [22].

The disputation *de obligationibus* is a kind of medieval disputation with two participants: Opponent and Respondent. In our description of the disputations we shall follow works of C. Dutilh-Novaes [6] and E.Lisanyuk [14]. According to the way the Respondent should evaluate the thesis of the disputation, one can distinguish between several types of obligations like *positio*, *depositio*, *dubitatio*, *impositio*, *petitio* and others. However, we are going to consider only one and the most widespread types called *positio*. It consists of *positum*, *propositum*, the phrase *'cedat tempus'* indicating the end of the disputations and victory of the respondent. There might be two optional elements: *casus* and *petitio* as well. Those elements are described as follows:

a) *Positum* is the basic element of the disputation that serves it as a thesis that the Respondent either accepts and then the disputation starts, or denies it and then the dispute fails to begin. Sometimes there are two more elements added to the *positum*, i.e., *casus* and *petitio* representing special conditions and constraints that together with *positum* form what is called *positio*, i.e., the whole set of thesis propositions;

b) *Propositum* represents a sentence put forward by the Opponent for the Respondent to evaluate and either accept or deny given the *positio*.

c) There exists a set of rules for time reading, including the phrase *'cedat tempus'* meaning the time is over.

d) A set of agents, or players, consisting of two players with asymmetric roles: Opponent and Respondent.

The opponent puts forward some proposition or a set of propositions called positum and positio respectively. Positio represents a thesis of the disputation. The respondent is supposed to evaluate it as:

i) possibly true,

ii) possibly false or

iii) a proposition with unknown logical value.

We shall consider only the first case in which the thesis was evaluated as possibly true. On the basis of the evaluation the respondent can admit the positum or deny it. After the evaluation is provided and the respondent has admitted the thesis the disputation starts.

There are two types of acts in the dialogue, which are presented by two roles: that of the opponent and that of the respondent. The role of the opponent consists in asking questions whereas the respondent is forced to answer. This shows us that the roles in the disputation de obligationibus are asymmetric. One can easily see that opponent is unforced as he himself chooses which proposition to bring up and so he also chooses a number of strategies for the respondent from the whole set of possible strategies whereas respondent is, firstly, obliged to give an answer and evaluate the proposition put forward and, secondly, she does not choose independently the strategy, but has to select one of the strategies previously picked out by the opponent.

The respondent may also be suggested to evaluate additional information contained in the proposals presented in the form of casus and petitio. Casus, or actual fact, and petitio represent the additional description of state of affairs. State of affairs is an important part of the disputation as it serves as a correlate of the evaluation of the propositions. The propositions are sentences brought up by the opponent in any step after the positum has been accepted. The respondent has to evaluate such propositions, having found out whether they are relevant to the positum and proposita, conceded in the earlier steps, according to the rules specified below. We shall distinguish between steps and rounds. By a step we understand each move of a player, whereas a round is formed by a question of the opponent and the respondent's answer. Rounds can be open or closed. We shall call some round open if and only if it has a question by the opponent, but not an answer of the respondent. Otherwise, the round is closed. It is easy to see that an open round is formed by a single step only, whereas a closed round has to contain two steps. For each step n of the disputation, beginning with the first propositum, the propositum is 'sequentially relevant' at step n if and only if it satisfies the following conditions:

(1) it logically follows from the conjunction of the positum together with any proposita that have been conceded at earlier steps of the disputation;

(2) it logically follows from the conjunction of the positum together with the contradictories of any proposita that have been denied at earlier steps.

It is 'irrelevant' at step n if and only if it is neither sequentially relevant nor incompatibly relevant there. On the basis of relevance of the propositum to the earlier conceded obligations the respondent evaluates the propositum. Thus, each proposition accepted at any point n of the disputation (starting from the thesis) becomes an *obligation* (obligatio) of the Respondent which serves as a foundation for the further evaluation of propositions.

For each step n of the disputation, and for each propositum p, p is true if it is sequentially relevant at n, and false if it is incompatibly relevant at n. After that, if the propositum was evaluated as true, the respondent has to concede it, if false, she has to deny it. If p is irrelevant in step n, the respondent has to evaluate it according to her knowledge of the actual facts. Thus, if p is irrelevant at n and the respondent knows it is true in fact, she should concede it; if p is irrelevant at n and the respondent knows it is false in fact, she should deny it; if p is irrelevant and the respondent does not know whether it is true or false, she should doubt it.

2. Obligation Games as a Formalisation of the Disputation *de obligationibus*

In this section we present the formalization of the medieval disputation proposed by Charles Hamblin which he called 'Obligation game'. First of all he specifies the language of the game as 'a finite propositional language based on elementary propositions' $a_0, a_1, ..., a_n$ and 'truth-functional operators, supplemented with several special locutions' [9, p. 260]. However, let us note that 'in place of propositional calculus we could substitute any other finite language of sufficiently normal type, for example, lower predicate calculus on a universe with finitely many individuals and limited variety' [9, p. 260]. Neither did Ch. Hamblin formalize the rule-language, nor did he care for historical accuracy and details as he used this type of disputation to illustrate his own system of formal dialectic and the origin of some fallacies. Thus it differs a bit from the other formalizations of the obligations, like those presented in the works of C. Dutilh-Novaes and E. Lisanyuk.

Let the disputation be specified by the tuple $\langle \Pi, O, P, F, W, C \rangle$, where:

- Π stands for the set of players. Obligation game normally has two players. Those players are given one of the two possible roles: the role of the opponent or the one of the respondent.
- O is an ordered set of propositions, put forward by the opponent to the respondent for the evaluation.
- $O = \{o_0, o_1, ..., o_n\}$, $n \geq 0$, where n is a position of the proposition in the obligation game, starting from o_0 which stands for the thesis.
- P is an ordered set of propositions, consisting of the answers of the respondent: $P = \{p_0, p_1, ..., p_n\}$, $n \geq 0$, where n is a position of the proposition in the obligation game, starting from p_0 which stands for the evaluation of the thesis.
- $P_{j+1} = \{p_0, p_1, ..., p_{j-1}, p_j, p_{j+1}\}$ represents a set of the propositions evaluated by the respondent in the step $j + 1$.
- F is the function of evaluation from the set O to the set of logical values $\{1, 0\}$, where 1 stands for true, 0 stands for false.

In Hamblin's Obligation game there are only two logical values whereas in other formalizations [6] there occur three logical values $\{1, 0, ?\}$, where "?" stand for an indeterminate value. In medieval disputations it seems to be used for the propositions evaluated as irrelevant, and not for the relevant ones. Historicly, the Respondent had a possibility to consider a proposition as doubtful[4] so the formalisation proposed by Ch. Hamblin

[4]if it was irrelevant and neither it nor its negation followed from his or her background knowledge.

does not fully represent the Medieval disputations *de obligationibus.* The third value is preserved in the systemes proposed by C. Dutilh-Novaes and H. Lagerlund and E.J. Olsson as well.

In his Obligation game Hamblin does not specify the procedure of evaluation and the basis on which the respondent decides whether to concede the propositum or its negation. It can be explained by the supposition that he assumes employing some basic formal system on the lower level of the game, and that the evaluation should proceed with the help of it. However, the same question arises with respect to the formalisation of C. Dutilh-Novaes, as S.Uckelman notices in [23]. In order to keep track of the propositions accepted by the respondent Ch. Hamblin introduces a notion of *commitment store.* C is a commitment store of the respondent, so that:

- $C_n = \{p_0, p_1, ..., p_n\}$, where $n \geq 0$, p_0 is positum.
- $C_j = C_{j-1} \cup p_j$, for each $j = 0, 1, ..., m + 1$.

Thus the *commitment store* is a set consisted of the propositions accepted by the Respondent and the negations of the propositions denied by her. Ch. Hamblin uses the notion of the commitment store for the respondent to specify the requirement of correctness of the respondent's answers. By the correctness of answers we understand here that the answers of the respondent should not form an implicit contradiction with any preposition in the set of previously accepted prepositions. By the explicit contradiction we mean here the existence of two propositios p_n and p_m such that $p_n = a_i$ and $p_m = \neg a_i$.

Surprisingly there is no set K in Ch. Hamblin's Obligation game. In the formalisation of C. Dutilh-Novaes K is an open set of true, false and obscure propositions $k_0, k_1, ..., k_n$, $(n \geq 0)$ that form a *common knowledge*, shared by all the participants of the disputation. Thus, it is not quite clear what basis should the respondent concede or deny the irrelevant propositions on, as if she has to instantiate them. However, as we shall see later from the **correctness-rule**, *Casus* might serve as a set specifying the truth value of some irrelevant propositions. Nevertheless, it does not usually contain all possible propositions of the language.

The Opponent moves first and her first locution has three parts: (a) 'actual fact', (b) 'positum' and (c) 'propositum', as C. Hamblin calls them. They are specified as follows:

(a) *Casus*, which in Hamblin's system is an obligatory part of the obligation game, consists of the words *'Actual fact'* and statement $'B'$. $'B'$ contains evaluation of the language, consisting of a state-description $b_1, b_2, ..., b_m$, where each $b_i = a_i$ or $b_i = \neg a_i$.

(b) *Positum* consists of word *'Positum'*, followed by a contingent statement $'C'$, where $'C' = o_0$.

(c) *Propositum* consists of the word *'Propositum I'* and statement o_1.

As one could notice, in Hamblin's obligation game (a), (b) and (c) form one single step and, thus, open only one round. This mans that the respondent can either accept (a), (b) and (c) all together or deny all os them[5]. However, in the disputation *de obligationibus* and its formalization by C. Dutilh-Novaes (b) and (c) represent separate steps and thus open two different rounds. That entails that the respondent has a larger set of strategies to choose: (1) he can accept both (b) and (c)[6]; (2) he can deny (b) and then the game does not start[7]; (3) he can accept (b) but deny (c). The strategy number (3) cannot be played out in the Obligation games. We can conclude that in Obligation games the Respondent has less strategies that he can follow according to the structural rules that results in the number of the games he can possibly win. Thus we can make an interim conclusion that the truth in Obligation games is different from the one in the disputations *de obligationibus* (as well as their formalization by C. Dutilh-Novaes), as the Respondent has less games he is able to win. If we understand casus and propositum as a sort of model specification, the above shows us that in Obligation games the agents start with more precise models than in

[5]However, in the latter case the game does not start.

[6]This strategy is equal to the one in he Obligation games where the respondent accepts (a), (b) and (c).

[7]This strategy equals the one in the Obligation games where the respondent denies (a), (b) and (c).

the formalization by C. Dutilh-Novaes. The fact that two rounds at the beginning of the disputations de obligationibus are combined into one round might entrap the Respondent to accept a contradiction. Let us consider the structural rules for an *obligation game*:

- **Answer-rule:** Each of the respondent's contributions $p_n = o_n \vee \neg o_n$, $n \geq 1$.
- **Ending-rule:** The disputation ends if and only if:
  (1) $P_n \models \bot$; or
  (2) $P_n \models \top$ and *cedat tempus*, which means 'the time is out'.
- **Winning-rule:**
  (1) Opponent wins if and only if $P_n \models \bot$
  (2) Respondent wins if and only if $P_n \models \top$ and *cedat tempus.*

  Ch. Hamblin defines the notion of *cedat tempus* by specifying the number of steps in the game so that the respondent wins if and only if $P_n \models \top$ and $n = 11$.
- **Correctness-rule:** The respondent's answer p_n is correct if and only if it is either
  1. implied by C_{n-1}, or
  2. consistent with C_{n-1} and implied by B; otherwise it is incorrect.

The correctness rule shows that Ch. Hamblin does not use the notion of relevance of the propositum to the positum or previously conceded proposita[8]. Thus, there is no difference between sequently relevant and sequently irrelevant propositions because no matter if it is relevant or not the respondent is only obliged to choose whether to concede the

[8] We shall add this notion to our reconstruction for the sake of clarity as we do with the concept of common knowledge. Otherwise, the respondent would have no rule according to which she should evaluate propositions.

proposition or its negation, but there is nothing said of his duty to concede sequentially relevant and deny incompatibly relevant. Although, the propositions stated as the actual fact ($'B'$) are important as they serve as the correlate of evaluation of respondent's answers as correct or incorrect which was specified in the correctness-rule. Ch. Hamblin's interpretation gives us no hint of the way the Respondent should answer and in that sense she is in no way determined. This still might be partly related to a possible interpretation for the Respondent and propositions relevant to K_C, thought there are differences with respect to the *positum*. It is not specified how the Respondent is fined for answering incorrectly, and, as there is no rule to make the Respondent accept formulae deducible from the positum and proposita[9], there is actually no way to force her to accept a contradiction. However, we shall consider the correctness rule as a forcing one in the example below.

Let us consider an example of the Obligation game, based on the treatise by Boethius [2]. Though the original text is written in a form of a monologue it has such a form that allows for a simple transformation into the dialogue, or better, a logical game.

[9]We do not use the notion of commitment store here as it also contains *casus* which we can view as a K_C set for the Obligation game. Though, we might add *casus* to a system with a common state of knowledge K_C, but then we should treat it as other *proposita* except for the fact that it is accepted with the *positum* as a set of preconditions.

	Opponent	**Respondent**	**Commitment Store**
1	1. **'Actual fact':** b_1: Everything that is tends to the good; b_2: Everything tends towards its like; b_3: That all things that are, are God is abhorrent; b_4: The things that are, are good. 2. **'Positum':** o_0: The things that are, are good by participation. 3. **'Propositum I':** o_1: The things that are, tend to the good.	p_1: I **concede** that *"The things that are, tend to be good"*. $p_1 = o_1$	$C_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, o_0, o_1\}$
2	**'Propositum II':** o_2: The things that are, are themselves good per se.	p_2: I **deny** that *"The things that are, are themselves good per se"*. $p_2 = \neg o_2$	$C_2 = C_1 \cup \{\neg o_2\}$; $C_2 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, o_0, o_1, \neg o_2\}$
3	**'Propositum III':** o_3: Everything tends towards its like.	p_3: I **concede** that *"Everything tends towards its like"*. $p_3 = o_3$	$C_3 = C_2 \cup \{o_3\}$; $C_3 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, o_0, o_1, \neg o_2, o_3\}$
4	**'Propositum IV':** o_4: The things that are, do tend to the good.	p_4: I **deny** that *"The things that are, do tend to the good"*. $p_4 = \neg o_4$	$C_4 = C_3 \cup \{\neg o_4\}$; $C_4 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, o_0, o_1, \neg o_2, o_3, \neg o_4\}$
5	**'Win and Finish'**		

In order to explicate the run of the obligation, and the Respondent's answers in particular, we need to add some comments with respect to each round as the game proceeds. Starting from the first round, it is clear that $b_1 \models o_1$. The respondent admits the positum and then can choose whether to concede or deny the propositum I. As the propositum I is irrelevant to the positum the respondent can evaluate this proposition according to the common knowledge. However, it is relevant to the special conditions of the game, or **actual fact (casus)**, the respondent should concede the propositum I in order to answer correctly.

In the round 2 one can notice that $o_0 \models \neg o_2$. *"For what is white by participation is not white per se in that it is, and the same in the case of other qualities. If they are good by participation, then, they aren't themselves good per se in any way"*. That means that if something is good by participation, it is neither good by substance, nor by itself (per se). **Propositum II** is relevant to the **positum**. Thus, it follows from the **positum** that **propositum II** is false and the respondent must deny it.

As for the round 3, the Respondent concedes the proposition because of $b_2 \models o_3$. Although, the **propositum III** is irrelevant to the **positum** (though Hamblin does not use the conception of relevance) it is relevant to the special conditions of the game, or **actual fact (casus)**, the respondent should concede the **propositum III** in order to answer correctly.

Finally, in round 4 the Respondent uses $o_3 \wedge \neg o_2 \models \neg o_4$ to deny the proposition. The opponent repeats once more the question o_1, but now it is relevant and according to the rules of the game the respondent has to deny the proposition.

This example shows us a possible flow of the obligation game as a reconstruction of the disputations *de obligationibus*. The opponent finishes the game and she has won because the respondent's last answer (p_4) was incorrect as her commitment store (C_4) became inconsistent as p_4 and p_1 together make a contradiction. This happens because $p_1 = o_1$ and $p_4 = \neg o_4$, where $o_1 = o_4$, so that we can restate the respondent's commitment store as follows: $C_4 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, o_0, o_1, \neg o_2, o_3, \neg o_1\}$.

Actually, as there are not any notions of sequently relevant and sequently irrelevant propositions, the respondent could accept the proposition o_4: *"The things that are, do tend to the good"* in the round number 4 of the previous example, but we still would have end up with a contradiction in the commitment store C_4, because it already existed in the step number 3 in the commitment store C_3, though it was implied, i.e., needed some logical inference from the propositions in C_3 for its explication. However, we should emphasize that Ch. Hamblin has not specified any inference rules for his system, so we should assume that along with accenting a language of some logical system we should use its inference rules and axioms as well.

Nevertheless, we suppose that Hamblin writes nothing about those rules as it is not particularly important as his aim is to show how his structural rules can influence the system. We shall face this problem once again while considering his system of formal dialectic in the next section 3.

3. The Difference between the Obligation Games and Formal Dialectic

In the previous section 2 we have considered the *Obligation game* which is supposed to be a formalization of the disputations *de obligationibus*. We have specified some of the features of those games as well. Now we shall briefly present the system of formal dialectic and see how we may use it to formalize disputations. So, similar to the obligation game, Hamblin does not pay much attention to the rules of inference according to which the players can make their moves which could mean that any set of rules making valid inference can work. Thus, different players can use different sets of rules with still good results in the game. Neither does he explicitly specify any logical model with for the game. However, we suppose that one can take some logical system and see how those rules of the game affect the number of true formulae. Therein after we shall specify some rules for the formal dialectic together with providing a general characteristics for it.

However, we would like to start with considering the same example as in the previous section but formalized using the formal dialectic. To simplify our representation we shall use the following notation:

- $p :=$ The things that are, tend toward good;
- $q :=$ The things that are, are themselves good *per se*;
- $r :=$ Everything tends towards its like.

	White's Commitment Store	**White**	**Black**	**Black's Commitment Store**
1	p	$?(p)$	Com(p)	p
2	p, q	$?(q)$	Com($\neg q$)	$p, \neg q$
3	p, q, r	$?(r)$	Com(r)	$p, \neg q, r$
4	$p, q, r,$ $(\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p$	$?((\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p\ )$	Com($(\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p\ $)	$p, \neg q, r,$ $(\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p$
5	$p, q, r,$ $(\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p,$ $p \vee \neg p$	$?(p \vee \neg p)$	Com($\neg p$)	$\neg p,\ p, \neg q, r,$ $(\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p$
6	$p, q, r,$ $(\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p$	Resolve($p \vee \neg p$)	No(p)	$\neg p,\ \neg q, r,$ $(\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p$

Now we shall specify the rules used in the above example. First of all we can divide all the rules of a dialectical system into two groups:

- Syntactic rules that govern the way the players act in the dialogue providing possible moves
- Rules that determine operations over commitment store determining what propositions are inserted or deleted from the commitment store.

DEFINITION 1. We can define the language of dialectical system $D = \langle Prop, Const, \Phi \rangle$ as follows:

1. Propositional variables $Prop = \{p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, ...\}$;
2. Standard propositional constants $Const = \{\vee, \neg, \rightarrow, \wedge\}$. Ch. Hamblin does not define rules for conjunction, however, he uses it in one of the examples. So we tried to extract the rule from the example of the dialogue [9, p. 267];
3. Functors for dialectical actions $\Phi = \{Com, No, ?, Why, Resolve\}$ defined as follows:

(a) $Com(A)$ is an 'utterance A', sometimes it is possible to use $Com(A, B)$. The uttered formula is added to the commitment store of both a speaker and a hearer with some exceptions.
(b) $No(A, B, \ldots, C)$ stands for 'no commitment $A, B, \ldots, C$' and deletes any $A, B, \ldots, C$ from the commitment store of the speaker.
(c) $?(A, B, \ldots, C)$ is a 'question $A, B, \ldots, C$', $n \geqslant 1$, where n is a number of propositions. We suppose that comma stands for disjunction here, i.e. $?(A \vee B \vee \ldots \vee C)$. This functor inserts the disjunction $A \vee B \vee \ldots \vee C$ into the commitment stores of both speaker and hearer with some exceptions;
(d) $Why(A)$, for any proposition A if it is not an axiom. It is a request for argumentation;
(e) $Resolve(A)$ is a request for resolution. It does not influence any commitment store.

Remark 1. The status of the resolutions in the formal dialectic is not quite clear, however, we can give a few interpretations of its function:

- We can view resolution as a request given to the other participant to identify whether formula A or $\neg A$ is consistent with his commitment store. As a result the other participant should answer either NoA or $No\neg A$. Thus we might consider resolution to be a sort of consistency test.
- It is also possible to suppose that resolution is a sort of belief revision operator. Though, Hamblin does not specify what happens to the formulae related to the one that was revised. At least, resolution might serve as an instrument to show the other participant that she has a contradiction in his commitment store and ask her to 'resolve' it.

If we compare these two systems: the Obligation game and the system of formal dialectic we would see that there is a number of similarities and differences between them. Among the things that look similar between those systems we should mention the following:

- Both Obligation game and the formal dialectic are standard two-valued systems. That might explain why Hamblin does not provide us with any special semantical model for them.

- Both systems have two leveled syntax: (1) syntax of the object language and inference rules (that are not explicitly specified though) and (2) structural rules[10]. Structural rules determine the protocol of communication between participants (or agents): in the case of Obligation game between opponent and respondent, and between the opponent and proponent, or Black and White, in the case of dialectic system.

- Both systems have a notion of commitment store which is dynamic, i.e., *a set of propsitional commitments that alter depending upon the moves the players make in the dialogue*[11] [26, p. 35].

As concerns the differences between the Obligation game and formal dialectic, we would like to mark out the following:

- The organization of commitment stores is different. In case of the Obligation game there is only one commitment store, that of the respondent, because we should trace only his responses. And it is connected to the second difference.

- The roles of agents in the Obligation game are asymmetric as it was specified earlier whereas in the dialectic system they are symmetrical except for the fact that White moves first.

[10]It is worth mentioning that the logical and the structural rules in the dialogue logic by P. Lorenzen and K. Lorenz [17] share the same idea of two levels of rules.

[11]We might also intoduce a notion of static commitment store that *is not altered by moves in the dialogue and it's contents are fixed before the dialogue commences* [26, p. 35]. That notion of commitment store would reflect the idea of common knowledge set K_C, especially if we take the interpretation according to which the Respondent may deny irrelevant propositions following from K_C in order not to lose.

- Another difference concerning commitment store is that in the case of Obligation game nothing can be deleted from it. That means that no retraction is possible, whereas in case of formal dialectic it is possible and players are able not only to insert commitments but also delete them by retracting their previous propositions. The latter brings about a problem for interpretation of the system.

- In relation to the commitment store, there is also difference in the ending of the game, because, as for the Obligation game, Ch. Hamblin clearly specifies the end of the game and the winning-rule whereas in case of formal dialectic he does neither the first, nor the second. That means that the game is potentially endless (if it even may be considered as a game) and there are no winning rules. Thus, we suppose that Obligation game and formal dialogue are two materially different types of dialogues: the former represents the antagonistic type, and the later is non-antagonistic. We also consider the obligation game to be a restricted type of the formal dialectic there two players are identical with respect to their knowledge and inference capacity. the difference between them is functional.

- In the case of Obligation game one of the players is forced to make certain moves (or at least we can interpret the *correctness rule* in that spirit), but as for the formal dialectic the system is semantically open, which means that *"there is no statement at all, even a tautological one, which a speaker can unconditionally be forced to utter, nor any set of statements of which he can be unconditionally forced to utter one"* [9, p. 259].

4. Why Obligation Games are not Disputations *de Obligationibus*?

In the previous sections (2 and 3) we have specified two possible formal representations of the medieval disputations *de obligationibus*. The question that arises is whether the Obligation game is actually a formalization of disputations *de obligationibus* or just a way to illustrate an example of a formal dialectic dialogue inspired by those disputations. In this section, we shall try to show that Obligation games are not adequate representations of disputations *de obligationibus*.

We insist that there are some crucial differences between K_C and C_n[12].

1. The first difference can be called conceptual. K_C is interpreted as a common knowledge set, that should be shared by all participants of the disputation. Although we can adopt the idea that those disputations were merely a 'convenient fiction' expressed in [11], nevertheless from the conceptual point of view K_C represents a set of agent's knowledge and beliefs (in some formalizations even an ordered one) whereas C_n might contain both common knowledge and beliefs[13] and propositions accepted in the flow of the game. But that means that the commitment store does not distinguish between common knowledge and the propositions accepted in the game, so we can not define any priority with respect to them as is done by Lagerlund and Olsson [11].

2. The Obligation game ignores very significant notions of relevance and irrelevance. Thus, players are not forced to accept or deny propositions on the basis of their relevance to those that were accepted earlier. Though, there is a correctness rule with respect to the commitment store, nevertheless, it is not specified what happens in a game if the respondent answers *incorrectly.* Thus the notion of commitment store can compensate for the absence of relevance relation but only partly[14].

3. There are also crucial structural changes in the disputation, i.e., Ch. Hamblin combines several steps into one that deprives the

[12] Here we are talking about the dynamic commitment store as it is specified for the Obligation game.

[13] Though Hamblin never says anything about them as if there were none or they were somehow presupposed. If we follow the former interpretation than the commitment store of the respondent is empty before the beginning of the game. However, if we adopt the latter, than the commitment store should contain all those propositions before the game starts.

[14] We even had to use the notions of sequently relevant and sequently irrelevant propositions while considering the example of the Obligation game in section 2.

respondent of the possibility to react to each proposition independently (that leads to some dramatical changes in the ability to have a winning strategy. We shall mention below that for some games over particular propositions, which the respondent could win in the disputation de obligationibus, the opponent has a winning strategy in the Obligation game).

4. The respondent has no ability to doubt proposition (so if she does not accept a proposition, she has to accept its negation) as the Obligation game system is two-valued. On the contrary, in the disputation de obligationibus the Respondent is believed to be able to mark a proposition as doubtful. Though we do not consider this system a three-valued construction, as those doubtful propositions do not influence the reasoning (i.e. are excluded from the process of evaluation of the subsequent propositions), we still consider this as a substantial difference.

At the end of this section we would like once again to bring about the problem of winning in the medieval disputation. As C. Dutilh-Novaes shows [6] the respondent always has a winning strategy unless he accepts a logically contradictory *positum*. However, in our example presented in section 1. the *positum* is not contractory. Why does the respondent lose then[15]? Where did the respondent make a mistake? This question turned out to be the most interesting one. If we carefully read the example through, we shall see that at each step the opponent offers the respondent only those propositions that follow logically either from the *positum* or the 'real fact' (*casus*). That means that all propositions accepted after the first step can be derived from it. Thus we should look for the contradiction (though, perhaps, implicit) in the first step of the game. Thus, if we pay our attention to the first round of the game, we shall see that *propositum I* is relevant to the 'real fact' (*casus*)[16]. By consequence, we should search for the contradiction in the set formed from the propositions put forward by the opponent in

[15] One can easily see that the opponent not only can win, but she even has a winning strategy in the game, so that she can force the respondent to lose.

[16] It is even a repetition of one of the propositions of the *casus*, namely b_1.

the *casus* and the *positum*. It is not surprising that we find an implicit contradiction there, though we lack the premise that 'something that is good by participation is not good per se' which should be a part of common knowledge K_C. We emphasize once again that we cannot reveal it by any rules of the Obligation game as there is no set K_C in Hamblin's formal system. Thus, having combined several steps into one Hamblin has trapped the respondent into an obligation of starting a game with a contradictive set of propositions.

Finally, we should like to say a few words of the characteristics of agents represented in the Obligation game. The Obligation game does not distinguish between the common knowledge, or the old beliefs (if there were any), and those that occured after the acceptance of the positum. In that respect he respondent is less rational then in other formalizations as she cannot distinguish between the old information and the new one. There remains the question of agents' determination. On the one hand, in case of formal dialectic the respondent is free to accept or deny a proposition unless she accepts a contradiction. On the other hand, if the correctness rule has a greater power than just recommendation, that would change the situation dramaticly and make it even more determined than that of the consistency maintenance games [6] (as we have here only two possible truth-values) or other formalizations.

5. Conclusion

In this paper we have examined the Obligation game and Hamblin's formal dialectics in their relation to the medieval disputations *de obligationibus* of the Burley type and other interpretations and formalizations of the latter. We have shown in sections 2, 3 and 4 that neither the Obligation game, nor formal dialectic can serve as a fruitful and adequate formalization the medieval disputation.

To sum up, the formal dialectic is a communicative protocol for rational agents that uses other formalized systems, not necessarily logic, as structural rules. We assume that it is a sort of a cognitive game for two or more participants with the objective of establishing an ordered set of propositions represented by commitment stores. It may also be used to check whether some set of propositions is contradictory and to eliminate any ascertained contradiction.

As for the obligation game, it is a variety of formal dialectic aimed at modeling the medieval disputation de obligtionibus. We can consider it as a game on consistency maintenance. We mark out the following features of the obligation game:

1. Common commitment store (as opposed to different commitment stores for each player in the formal dialectic);

2. Classical propositional logic (sometimes with modal fragment) as a way to set up the truth conditions for propositions;

3. Impossibility to delay the round closure. If we compare it to the dialogue logic of P. Lorenzen, we will see that there exist some limitations of round closure for intuitionistic games, though they are not so strict;

4. Impossibility to give up previously accepted propositions.

To sum up we would like to make a conclusion that neither the Obligation game, nor the formal dialectic can be assumed an adequate formalization of the disputation *de obligationibus*, though they show some interesting connections between the structural rules and the sets of formulae which the respondent can have a winning strategy about. It also reveals some features of the rational agents participating in the game.

References

[1] van Benthem, J. "Logical Construction Games", in: *Acta Philosophica Fennica* 78, Truth and Games, essays in honour of Gabriel Sandu, ed. by T. Aho and A-V Pietarinen, 2006, pp. 123–138.

[2] Boethius, A. M. S. *De Hebdomadibus* [http://logicmuseum.com/authors/boethius/dehebdomadibus.htm, accessed on 26.03.2017].

[3] Brown, M.A. "The role of the Tractatus de Obligationibus in medieval logic", *Franciscan Studies*, 1966, Vol. 26, pp. 26–35.

[4] Burley, W. "Obligations", in: N. Kretzmann and E. Stump (eds.), *Logic and the Philosophy of Language*. Cambridge University Press, 1988, pp. 369–412.

[5] Dragalina-Chernaya, E. G. "Granitsy logiki: Ontologicheskii povorot"[The Bounds of Logic: Ontological Turn], *Filosofiya nauki* [Philosophy of Science], 2009, No. 14, pp. 87–99. (In Russian)

[6] Dutilh Novaes, C. "Medieval Obligationes as Logical Games of Consistency Maintenance", *Synthese*, 2005, Vol. 145(3), pp. 371–395.

[7] Dutilh Novaes, C. "Roger Swyneshed's obligationes: A logical game of inference recognition?", *Synthese*, 2006, Vol. 151, pp. 125–53.

[8] Dutilh-Novaes, C. *Formalizing medieval logical theories : suppositio, consequentiae and obligationes*. Dordrecht, Springer, 2007. 316 pp.

[9] Hamblin, Ch. *Fallacies*. London, 1970. 336 pp.

[10] Hintikka, J. and Sandu, G. "What is Logic?", in: D. Jacquette (ed.), *Handbook of the Philosophy of Logic*, Elsevier, Amsterdam, 2007, pp. 13–40.

[11] Lagerlund, H., Olsson, E. "Disputation and Change of Belief – Burley's Theory of Obligationes as a Theory of Belief Revision", in: *Yrjonsuuri*, 2001, pp. 35–62.

[12] Lisanyuk, E. N. "Polemika i srednevekovyi logicheskii 'disput"' [Polemics and Medieval Logical "Disputation"], in: *Kul'tura polemiki i argumentatsii ot pozdnei antichnosti do Novogo Vremeni* [Culture of Polemics and Argumentation from the Late Antiquity to Modern Times], ed. by Yu. I. Ivanova. Moscow: NRU HSE, 2012, pp. 128–156. (In Russian)

[13] Lisanyuk, E. N. "Ritorika i formal'naya dialektika", [Rhetoric and Formal Dialectic], *RATsIO.ru*, 2010, No. 3, pp. 26–42. (In Russian)

[14] Lisanyuk, E. N. "Srednevekovyi disput", [Medieval Dispute], *Logiko-filosofskie shtudii* [Logical and Philosophical Studies], 2006, Vyp. 4, pp. 212–228. (In Russian)

[15] Lisanyuk, E. N., Pavlova, A. M. "Logicheskie aspekty mnogoobraziya agentov", [Logical Aspects of the Diversity of Agents in Practical Reasoning], *Izvetiya ural'skogo universiteta. Seriya 3. Obshchestvennye nauki* [IZVESTIA Ural Federal University Journal. Series 3. Social and Political Sciences], 2016, Vol. 11, No. 4, pp. 45–60. (In Russian)

[16] Liu, F. "Diversity of agents and their Interaction", *Journal of Logic, Language and information*, Springer Netherlands, 2009, Vol. 18, issue 1, pp. 23-53.

[17] Lorenzen, P., Lorenz, K. *Dialogische Logik*. Darmstadt, 1978. 238 pp.

[18] Rahman, Sh. "Remarks on Dialogical Meaning: A Case Study", proceedings of *Proofs and Dialogues*, 2011, [http://ls.informatik.uni-tuebingen.de/prodi/slides/Rahman.pdf, accessed on 26.03.2017].

[19] Rahman, Sh., Ruckert, H. "Preface", *Synthese*, 2001, No. 127, pp. 1–6.

[20] Reed, Ch., Walton, D. "Argumentation Schemes in Dialogue", in: H.V. Hansen, et. al. (eds.), *Dissensus and the Search for Common Ground*, CD-ROM, Windsor, ON: OSSA, 2007, pp. 1–11.

[21] Read, St. "Obligations, Sophisms and Insolubles", Working paper WP6/2013/01 / St. Read, National Research University "Higher School of Economics", Moscow: Publ. House of the Higher School of Economics, 2013. 32 pp.

[22] Spade, P.V. "Three theories of obligationes: Burley, Kilvington and Swyneshed on counterfactual reasoning", *History and Philosophy of Logic*, Vol. 3, 1982, pp. 1–32.

[23] Uckelman, S. L. "Obligationes as Formal Dialogue Systems", in: *Proceedings of the fifth starting AI researchers' symposium.* Amsterdam, 2011, pp. 341–353.

[24] Uckelman, S. L., Johnston, Sp. "A Simple Semantics for Aristotelian Apodeictic Syllogistics", *Advances in Modal Logic*, 2010, Vol. 8, pp. 454–469.

[25] Weingartner, P. *Basic Questions on Truth*, Kluwer Academic Publishers, 2000. 230 pp.

[26] Wells, S., Reed, Ch. "Formal Dialectic Specification", in: *Argumentation in Multi-Agent Systems First International Workshop*, 2004, pp. 31–43.

[27] Yrjönsuuri, M. "The role of casus in some fourteenth-century treatises on sophismata and obligations", in: K. Jacobi, ed., *Argumentations theorie.* Brill, Leiden, 1993, pp. 301–21.

[28] Yrjönsuuri, M. "Obligationes: 14th Century Logic of Disputational Duties", in: *Acta Philosophica Fennica 55*, Societas Philosophica Fennica. Helsinki, 1994. 182 pp.

[29] Yrjönsuuri, M. "Obligations as Thought Experiments", in: I. Angelelli, M. Cerezo (eds.) *Studies on the History of Logic*, Walter de Gruyter, Berlin, 1996, pp. 79–96.

[30] Yrjönsuuri, M. (ed.) *Medieval Formal Logic.* Kluwer, Dordrecht, 2001. 242 pp.

Исправления

Erratum

Исправления в журнале «Логические исследования. 2016. Том 22. № 1»

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
С. 40	строка 2	$\geq (\alpha, \beta) max$	$\geq max(\alpha, \beta)$
С. 40	строка 8	$f((\mathrm{A} \vee \mathrm{B})) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\mathrm{A}) = 1$ и $f(\mathrm{B}) = 1$	$f((\mathrm{A} \vee \mathrm{B})) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\mathrm{A}) = 1$ или $f(\mathrm{B}) = 1$
С. 40	строка 9	$f((\mathrm{A} \supset \mathrm{B})) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\mathrm{A}) = 0$ и $f(\mathrm{B}) = 1$	$f((\mathrm{A} \supset \mathrm{B})) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\mathrm{A}) = 0$ или $f(\mathrm{B}) = 1$
С. 48	строка 18	… неверно, что $(\neg \mathrm{Q}) \notin S$	… неверно, что $(\neg \mathrm{Q}) \in S$
С. 48	строка 20	… неверно, что $\mathrm{Q} \notin S$, то $(\neg \mathrm{Q}) \in S$	… неверно, что $\mathrm{Q} \in S$, то $(\neg \mathrm{Q}) \in S$
С. 48	строка 28	$(\neg \mathrm{A}) \in S$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \in S$	$(\neg \mathrm{A}) \in S$ тогда и только тогда, когда неверно, что $\mathrm{A} \in S$

Information for authors

• *Logical Investigations* accepts for submission papers containing original results in all areas of logic. The papers should not have been published or simultaneously submitted to another publication. (Sections of the journal: `http://eng.iph.ras.ru/log_inv.htm`)
• The Editor in Chief makes the decision which of the submitted articles should be published, with due account for opinions of the Editorial Board and the reviewers. The decision is made within two months since the date of submission of the manuscript.
• Authors are not charged for the publication.
• Papers should be submitted electronically in the LaTeX 2_ε format (special permission of the editorial board is needed for submissions to be made in the MS Word format). While typesetting a paper, the style file li.sty and the master file li.tex should be used; both files, along with a sample paper file, can be accessed at `http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm`
• Papers should not exceed 24 pages in the above mentioned format (including the notes, the bibliography, the abstract).
• Footnotes should appear at the bottom of the page and should be numbered sequentially throughout the paper.
• In addition to the principal text, the manuscript should include the following mandatory elements:

1) Information about the author(s):
    - first and last names of the author;
    - affiliation;
    - full address of the place of work (including the postal code, country and city);
    - author's e-mail address.
2) abstract (100 to 200 words);
3) keywords (5-7 words/word combinations);
4) the list of works cited.

• The bibliographical references should be placed at the end of the paper as the general list ordered alphabetically, and formatted in strict accordance with the guidelines of the international bibliographical databases (Scopus and others). Please see the guidelines here: `http://eng.iph.ras.ru/page49940199.htm`

Submissions should be e-mailed to the following address:
logicalinvestigations@gmail.com

Информация для авторов

• Журнал «*Логические исследования*» принимает к публикации рукописи, содержащие изложение оригинальных результатов из различных областей современной логики, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. (Рубрики журнала см. `http://iph.ras.ru/login.htm`)
• Решение о публикации текста принимается главным редактором с учетом мнения редколлегии и оценки рецензентов. Решение о публикации принимается в течение двух месяцев с момента предоставления рукописи.
• Плата за опубликование рукописей не взимается.
• Рукопись должна быть представлена в электронном виде и оформлена в формате $\LaTeX\,2_\varepsilon$ (по согласованию с редколлегией — в MS Word с обязательным предоставлением pdf-файла). При подготовке рукописи в $\LaTeX\,2_\varepsilon$ необходимо использовать стиль li.sty. Стилевой файл размещен в правилах предоставления рукописей: `http://iph.ras.ru/login_rec.htm`
• Объем рукописи не должен превышать 24 стр. (60 тыс. знаков), включая ссылки, примечания, список литературы, аннотацию.
• Помимо основного текста, рукопись должна включать в себя следующие обязательные элементы на **русском** и **английском языках**:

1) сведения об авторе(ах):
   - фамилия, имя и отчество автора;
   - место работы;
   - полный адрес места работы (включая страну, индекс, город);
   - адрес электронной почты автора.
2) название статьи;
3) аннотация (от 100 до 200 слов);
4) ключевые слова (5-7 слов/словосочетаний);
5) список литературы.

• Цитируемая литература помещается в конце статьи общим списком в алфавитном порядке и оформляется строго в соответствии с правилами. Рукописи на русском языке обязательно должны содержать *два варианта представления списка литературы*:
1) список, озаглавленный «Литература» и выполненный в соответствии с требованиями ГОСТа.
2) список, озаглавленный «References» и выполненный в соответствии с требованиями международных библиографических баз данных.
(Правила оформления литературы — `http://iph.ras.ru/login_rec.htm`)

Статьи следует направлять по адресу
logicalinvestigations@gmail.com

Научно-теоретический журнал

Логические исследования / Logical Investigations
2017. Том 23. Номер 1

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт философии Российской академии наук

Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-61228 от 03.04.2015 г.

Главный редактор: $\boxed{\textit{А.С. Карпенко}}$

Ответственный секретарь: *Н.Е. Томова*

Технические редакторы: *Ю.А. Аношина, Ю.В. Хорькова*

Художник: *Н.Н. Попов*

Подписано в печать с оригинал-макета 04.05.17.
Формат 70х100 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 11,25. Уч.-изд. л. 10,4. Тираж 1 000 экз. Заказ № 10.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Компьютерная верстка: *Н.Е. Томова*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Свободная цена

Информацию о журнале «Логические исследования» см. на сайте:
`http://iph.ras.ru/login.htm`