Логические исследования
2017. Т. 23. № 1. С. 57–82
УДК 164.07+510.649

Logical Investigations
2017, Vol. 23, No. 1, pp. 57–82
DOI: 10.21146/2074-1472-2017-23-1-57-82

В.М. Попов

# К проблеме характеризации логик васильевского типа: о табличности логик $I_{\langle x,y\rangle}(x, y \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $x < y)$. Часть I[1]

**Попов Владимир Михайлович**
Кафедра логики, философский факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4
E-mail: pphiloslog@mail.ru

*Памяти российского философа и логика*
*Елены Дмитриевны Смирновой,*
*выдающегося специалиста в области логической семантики,*
*посвящается*

В этой статье, продолжающей работу, проводимую в [1], изучается проблема табличности $I$-логик васильевского типа (пропозициональная логика называется табличной, если она имеет конечную характеристическую матрицу). Основной результат, полученный в данной статье: для всяких целых неотрицательных чисел x и y, первое из которых меньше второго, логика $I_{\langle \mathrm{x,y}\rangle}$ таблична (класс всех таких логик является бесконечным подклассом класса всех $I$-логик васильевского типа). Предлагаемое исследование основано на использовании результатов, полученных в [1], и на применении авторской кортежной семантики. Для достижения указанного основного результата мы показываем, как по произвольным целым неотрицательным числам $m$ и $n$, удовлетворяющим неравенству $m < n$, строится логическая матрица $\mathfrak{M}(m, n)$, которая является конечной характеристической матрицей логики $I_{\langle m,n\rangle}$. Поскольку носитель логической матрицы $\mathfrak{M}(m, n)$ есть некоторое множество 0-1-кортежей, семантику, базирующуюся на этой логической матрице, естественно называть кортежной семантикой. Важное замечание: статья публикуется в два приема. Перед вами первая часть статьи, вторую часть статьи планируется опубликовать во втором номере «Логических исследований» за 2017 год.

*Ключевые слова:* $I$-логика $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $m < n)$, двузначная семантика $I$-логики $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $m < n)$, кортежная семантика $I$-логики $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $m < n)$

---

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 16-03-00224а.

Цель работы — доказательство того, что для всяких таких целых неотрицательных чисел x и y, что x < y, логика $I_{\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle}$ таблична. С этой целью здесь показано, как по произвольным целым неотрицательным числам $m$ и $n$, удовлетворяющим неравенству $m < n$, строится логическая матрица $\mathfrak{M}(m,n)$, которая является характеристической матрицей логики $I_{\langle m,n\rangle}$. Семантику, базирующуюся на логической матрице $\mathfrak{M}(m,n)$, называем кортежной семантикой. В данном контексте введение термина «кортежная семантика» мотивировано тем, что носитель логической матрицы $\mathfrak{M}(m,n)$ есть некоторое множество 0-1 -кортежей. Как и в работе [1], курсивные буквы (иногда с индексами) латинского и греческого алфавитов обозначают параметры, а прямые буквы (также иногда с индексами) указанных алфавитов используются в качестве связанных переменных.

Нам потребуется стандартно определяемый пропозициональный язык $L$, алфавиту которого принадлежат в точности следующие символы: $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (пропозициональные переменные языка $L$), $\&, \vee, \supset$ (бинарные логические связки языка $L$), $\neg$ (унарная логическая связка языка $L$), левая и правая круглые скобки. Множество всех пропозициональных переменных языка $L$ обозначаем через $\mathrm{Prop}_L$. Определение $L$-формулы индуктивно: (1) всякая пропозициональная переменная языка $L$ есть $L$-формула, (2) если $A$ и $B$ являются $L$-формулами, то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, и $(\neg A)$ являются $L$-формулами, (3) ничто другое не является $L$-формулой. Квазиэлементарной $L$-формулой называем $L$-формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка $L$. Длиной $L$-формулы называем, как это принято, число всех вхождений символов $\&, \vee, \supset, \neg$ в эту $L$-формулу. Ясно, что для всякой $L$-формулы существует единственная длина этой $L$-формулы и что длина всякой $L$-формулы есть целое неотрицательное число. Обозначаем длину $L$-формулы через $h(A)$. Условимся обозначать через $\lambda$ отображение множества $\{1,\ 2,\ldots\}$ всех целых положительных чисел в одноэлементное множество $\{\neg\}$.

Соглашение 1: для всякой $L$-формулы $A$ $\neg^{[0]}(A)$ есть $A$.

Соглашение 2: для всякой $L$-формулы $A$ и для всякого целого положительного числа d $\neg^{[\mathrm{d}]}(A)$ есть сокращение для $(\lambda(\mathrm{d})\ldots(\lambda(1)A)\ldots)$.

Замечание 1: для всякой $L$-формулы $A$ и для всякого целого положительного числа d $\neg^{[0]}(A)$ и $\neg^{[\mathrm{d}]}(A)$ являются $L$-формулами.

Замечание 2: можно доказать, что для всякого $A$ и для всякого целого неотрицательного числа k:$A$ есть квазиэлементарная $L$-формула длины k тогда и только тогда, когда $A$ есть $\neg^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{q})$ для некоторой пропозициональной переменной q языка $L$.

Логикой называем непустое множество $L$-формул, замкнутое относительно правила modus ponens в $L$ и относительно правила пропозициональной подстановки в $L$ (последнее правило есть правило подстановки $L$-формулы в $L$-формулу вместо пропозициональной переменной языка $L$).

Следуя [1], покажем как по любым x и y из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ определяется исчисление $HI_{\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle}$ гильбертовского типа и множество $I_{\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle}$. С этой целью условимся, что $\alpha$ и $\beta$ принадлежат множеству $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$. Язык исчисления $HI_{\langle \alpha,\beta\rangle}$ есть $L$. Аксиомами исчисления $HI_{\langle \alpha,\beta\rangle}$ являются все те и только те $L$-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих двенадцати видов (здесь $A$, $B$ и $C$ – $L$-формулы):

(I) $((A \supset B)\supset((B \supset C)\supset(A \supset C)))$, (II) $(A \supset(A \vee B))$, (III) $(B \supset(A \vee B))$, (IV) $((A \supset C)\supset((B \supset C)\supset((A \vee B)\supset C)))$, (V) $((A\&B)\supset A)$, (VI) $((A\&B)\supset B)$, (VII) $((C \supset A)\supset((C \supset B)\supset(C \supset(A\&B))))$, (VIII) $((A \supset(B \supset C))\supset((A\&B)\supset C))$, (IX) $(((A\&B)\supset C)\supset(A \supset(B \supset C)))$, (X) $(((A \supset B)\supset A)\supset A)$, (XI,$\alpha$) $((\neg D)\supset(D \supset A))$, где $D$ есть $L$-формула, которая не является квазиэлементарной $L$-формулой длины $< \alpha$, $(XII, \beta)$ $((E \supset(\neg(A \supset A)))\supset(\neg E))$, где $E$ есть $L$-формула, которая не является квазиэлементарной $L$-формулой длины $< \beta$.

Исчисление $HI_{\langle \alpha,\beta\rangle}$ имеет единственное правило — modus ponens в $L$.

В [1] даны следующие определения: (1) определение $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательства длины $n$ ($n$ есть целое положительное число) $L$-формулы $A$ — определение 1 в [1], (2) определение $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательства $L$-формулы $A$ — определение 2 в [1], (3) определение $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-вывода длины $n$ ($n$ есть целое положительное число) из множества $M$ $L$-формул $L$-формулы $A$ — определение 3 в [1], (4) определение $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-ввода из множества $M$ $L$-формул $L$-формулы $A$ — определение 4 в [1], (5) определение $L$-формулы, доказуемой в $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, — определение 5 в [1]. Эти определения стандартны и здесь не приводятся.

Соглашение 3: следуя работе [1], условимся о том, что (1) для всякого множества K $L$-формул и для всякой $L$-формулы F запись «$\mathrm{K}\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}\mathrm{F}$» есть сокращение для «существует $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-вывод из множества K $L$-формул $L$-формулы F», а запись «$\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}\mathrm{F}$» есть сокращение для «существует $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательство $L$-формулы F».

Вслед за [1] обозначаем через $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ множество всех $L$-формул, доказуемых в $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. Стереотипное доказательство того, что для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ $I_{\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle}$ является логикой, здесь не приводим. Информация о том, какого рода логикой является $I_{\langle x,y\rangle}$, где $x$ и $y$ принадлежат множеству $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$, при тех или иных условиях, накладываемых на $x$ или/и $y$, имеется в [1]. Следуя [1], называем $I$-логикой васильевского типа такую логику $I_{\langle x,y\rangle}$, что $x$ и $y$ принадлежат множеству $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ и при этом $x \neq 0$ или $y \neq 0$. Очевидно, что для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ верно следующее: если x < y, то $I_{\langle x,y\rangle}$ есть $I$-логика васильевского типа. Опираясь на утверждение У7 из [1], можно доказать, что класс всех логик, каждая из которых есть $I_{\langle x,y\rangle}$ для некоторых таких x и y из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$, что x < y, бесконечен.

Для доказательства табличности интересующих нас логик потребуется двузначная семантика этих логик, которую мы построим, используя результаты работы [1]. Условимся, что далее везде $m$ и $n$ являются целыми неотрицательными числами и $m < n$.

Определение 1. $I_{\langle m,n\rangle}$-предоценкой называем отображение множества всех квазиэлементарных $L$-формул, длина каждой из которых $\leq n$, в множество $\{0, 1\}$.

Определение 2. $I_{\langle m,n\rangle}$-оценкой называем $I_{\langle m,n\rangle}$-предоценку $v$, выполняющую для всякой квазиэлементарной $L$-формулы Q следующее условие: если $m \leq$h(Q)$< n$ и $v$(Q)=1, то $v$((¬Q))=0.

Определение 3. $I_{\langle m,n\rangle}$-означиванием при $I_{\langle m,n\rangle}$-оценке называем такое отображение $f$ множества всех $L$-формул в множество {0,1}, что выполняются следующие условия:

(1) для всякой квазиэлементарной $L$-формулы A, длина которой $\leq n$, $f$(A)= $v$(A);
(2) для всякой квазиэлементарной $L$-формулы A, длина которой $\geq n$: $f$((¬A))=1 тогда и только тогда, когда $f$(A)=0;
(3) для всякой $L$-формулы A, не являющейся квазиэлементарной $L$-формулой: $f$((¬A))=1 тогда и только тогда, когда $f$(A)=0;
(4) для всяких L-формул A и B:
$f$((A&B))=1 тогда и только тогда, когда $f$(A)=1 и $f$(B)=1,
$f$((A∨B))=1 тогда и только тогда, когда $f$(A)=1 или $f$(B)=1,
$f$((A⊃B))=1 тогда и только тогда, когда $f$(A)=0 или $f$(B)=1.

Замечание 3. Можно доказать, что для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v существует единственное $I_{\langle m,n\rangle}$-означивание при v.

Соглашение 4. Через $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}$ обозначаем $I_{\langle m,n\rangle}$-означивание при $I_{\langle m,n\rangle}$-оценке $v$.

Лемма 1. Для всякой $L$-формулы A и для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v: либо $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}$(A)=1, либо $\Phi_v^{\langle m,n\rangle}$ (A)=0.

Стереотипное доказательство леммы 1 здесь не приводим.

Руководствуясь работой [1], дадим определение (4) и определение (5).

Определение 4. Называем $A$ и $I_{\langle m,n\rangle}$-общезначимой $L$-формулой, если для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(A)$=1.

Разумеется, всякая $I_{\langle m,n\rangle}$-общезначимая $L$-формула является $L$-формулой.

Определение 5. Говорим, что $A$ $I_{\langle m,n\rangle}$-следует из $M$ (или из $M$ $I_{\langle m,n\rangle}$-следует $A$), если выполняются три условия: (1) $A$ есть $L$-формула, (2) $M$ есть множество $L$-формул, (3) для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v верно, что если $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}$=1 для всякой $L$-формулы B из $M$, то $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle m,n\rangle}(A)$=1.

Теорема 1. Для всякого множества M $L$-формул и для всякой $L$-формулы A: M $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ A тогда и только тогда, когда A $I_{\langle m,n\rangle}$-следует из M.

Теорема 1 является простым следствием теоремы 7 работы [1]. Адекватность воспроизведенной здесь двузначной семантики логики $I_{\langle m,n\rangle}$ устанавливает следующая теорема 2, являющаяся следствием теоремы 9 работы [1].

Теорема 2. Для всякой $L$-формулы A: A $\in I_{\langle m,n\rangle}$ тогда и только тогда, когда A есть $I_{\langle m,n\rangle}$-общезначимая $L$-формула.

При доказательстве табличности интересующих нас логик будем использовать предложенные автором кортежные семантики, адекватные этим логикам. Построим кортежную семантику, адекватную логике $I_{\langle m,n\rangle}$.

Определение 6. $\langle m,n\rangle$-кортеж есть такое отображение $X$ множества $\{1,\ldots,n,n+1\}$ в множество $\{0,1\}$, что для всякого целого числа i: если $m+1\leq$i$<n+1$ и $X$(i) $=1$, то $X$(i+1) $=0$.

Определение 7. Говорим, что $a$ есть $k$-тый член $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$, если $k\in\{1,\ldots,n,n+1\}$ и $a$=$X(k)$.

Замечание 4. Разумеется, существует единственное множество всех $\langle m,n\rangle$-кортежей и единственное множество всех таких $\langle m,n\rangle$-кортежей, первый член каждого из которых есть 1 (первое из этих множеств обозначаем через $C_{\langle m,n\rangle}$, а второе — через $D_{\langle m,n\rangle}$).

Определение 8. Выделенный $\langle m,n\rangle$-кортеж есть $\langle m,n\rangle$-кортеж из $D_{\langle m,n\rangle}$.

Определение 9. Нормальный $\langle m, n\rangle$-кортеж есть такой $\langle m, n\rangle$-кортеж $X$, что для всякого целого положительного числа i, которое $< n{+}1$, $X(\mathrm{i}) \neq X(\mathrm{i}{+}1)$.

Определение 10. Единичный $\langle m, n\rangle$-кортеж есть нормальный $\langle m, n\rangle$-кортеж, первый член которого есть 1.

Определение 11. Нулевой $\langle m, n\rangle$-кортеж есть нормальный $\langle m, n\rangle$-кортеж, первый член которого есть 0.

Ясно, что существуют единственный единичный $\langle m, n\rangle$-кортеж и единственный нулевой $\langle m, n\rangle$-кортеж. Первый из этих $\langle m, n\rangle$-кортежей обозначаем через $1_{\langle m,n\rangle}$, а второй через $0_{\langle m,n\rangle}$. Ясно также, что для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y существует единственная упорядоченная пара, первый член которой есть X, а второй — Y.

Определение 12. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y: $Z$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ тогда и только тогда, когда верно следующее: ($Z = 1_{\langle m,n\rangle}$, X(1)=1, Y(1)=1) или ($Z = 0_{\langle m,n\rangle}$, X(1)≠1 или Y(1)≠1).

Определение 13. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y: $Z$ есть $\vee_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ тогда и только тогда, когда верно следующее: ($Z = 1_{\langle m,n\rangle}$, X(1)=1 или Y(1)=1) или ($Z = 0_{\langle m,n\rangle}$, X(1)≠1, Y(1)≠1).

Определение 14. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y: $Z$ есть $\supset_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ тогда и только тогда, когда верно следующее: ($Z = 1_{\langle m,n\rangle}$, X(1)=0 или Y(1)=1) или ($Z = 0_{\langle m,n\rangle}$, X(1)≠0, Y(1)≠1).

Определение 15. Для всякого $\langle m, n\rangle$-кортежа X: $Z$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X тогда и только тогда, когда $Z$ есть такое отображение множества $\{1,\ldots, n, n{+}1\}$ в множество $\{0{,}1\}$, что верны следующие утверждения: (1) $Z(1)$=X(2),…, (n) $Z(n)$=X($n$+1), (n+1,a) $Z(n{+}1)$=1, если X(n+1)=0, (n+1,b) $Z(n{+}1)$=0, если X(n+1)=1.

Замечание 5. Понятно, что для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y: любой $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ является отображением множества $\{1,\ldots,\ n,\ n{+}1\}$ в множество $\{0{,}1\}$, любой $\vee_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ является отображением множества $\{1,\ldots,\ n, n{+}1\}$ в множество $\{0{,}1\}$, любой $\supset_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ является отображением множества $\{1,\ldots, n,\ n{+}1\}$ в множество $\{0{,}1\}$, любой $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X является отображением множества $\{1,\ldots,\ n{,}n{+}1\}$ в множество $\{0{,}1\}$.

Замечание 6. Разумеется, что существует (а) единственное множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где $X$ и $Y$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а $Z$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, (б) единственное множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где $X$ и $Y$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а $Z$ есть $\vee_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, (в) единственное множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где $X$ и $Y$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а $Z$ есть $\supset_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, (г) единственное множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle X, Z\rangle$, где $X$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж, а $Z$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X.

Соглашение 9. Множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где $X$ и $Y$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а $Z$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, обозначаем через $\&_{\langle m,n\rangle}$.

Соглашение 10. Множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где $X$ и $Y$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а $Z$ есть $\langle m, n\rangle$-напарник упорядоченной пары $\langle m, n\rangle$, обозначаем через $\vee_{\langle m,n\rangle}$.

Соглашение 11. Множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где $X$ и $Y$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а $Z$ есть $\& \supset_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, обозначаем через $\supset_{\langle m,n\rangle}$.

Соглашение 12. Множество всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle X, Z\rangle$, где $X$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж, а $Z$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X, обозначаем через $\neg_{\langle m,n\rangle}$.

Лемма 2. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y и для всякого Z: если Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то Z есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

Докажем лемму 2.

(1) $X$ и $Y$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами (допущение).

(2) $Z$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$ (допущение).

(3) ($Z = 1_{\langle m,n\rangle}$, $X(1){=}1$, $Y(1){=}1$) или ($Z = 0_{\langle m,n\rangle}$, $X(1){\neq}1$, $Y(1){\neq}1$) (из (2), по определению 12).

(4) $Z = 1_{\langle m,n\rangle}$ или $Z = 0_{\langle m,n\rangle}$ (из (3)).

Разумеется, что (5) $1_{\langle m,n\rangle}$ и $0_{\langle m,n\rangle}$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами.

(6) $Z$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж (из (4) и (5)).

Снимая допущение (2) и обобщая, получаем, что

(7) для всякого Z: если Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то Z есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 2. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y и для всякого Z: если Z есть $\vee_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то Z есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

Доказательство леммы 3 аналогично данному выше доказательству леммы 2.

Лемма 4. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y и для всякого Z: если Z есть $\supset_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то Z есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

Доказательство леммы 4 аналогично данному выше доказательству леммы 2.

Лемма 5. Для всякого $\langle m, n\rangle$-кортежа X и для всякого Z: если Z есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа X, то Z есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

Докажем лемму 5.

(1) $X$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж (допущение).

(2) $Z$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа $X$ (допущение).

Опираясь на утверждения (1) и (2) и определение 15, получаем, что

(3) $Z$ есть такое отображение множества $\{1,\ldots, n, n{+}1\}$ в множество $\{0,1\}$, что верны следующие утверждения: (1) $Z(1)=$ X(2), $\ldots$, $(n) Z(n)= X(n+1)$, ($n$+1,a)$Z(n{+}1)$=1, если $X$(n+1)=0, (n+1,b) $Z(n{+}1)$=0, если $X$(n+1)=1.

(4) $X$ есть такое отображение множества $\{1,\ldots, n, n{+}1\}$ в множество $\{0,1\}$, что для всякого целого числа i: если $m$+1$\leq$ i $<$ $n$+1 и $X$(i)=1, то $X$(i+1)=0 (из (1), по определению 6).

(5) $i$ есть целое число (допущение).

(6) $m + 1 \leq i < n + 1$ и $Z(i) = 1$ (допущение).

(7) $m + 1 \leq i < n + 1$ (из (6)).

(8) $Z(i)$=1 (из (6)).

(9) $Z(i)= X(i{+}1)$ (из (3), (5) и (7)).

(10) $i < n$ или $i = n$ (из (5) и (7)).

(11) Для всякого целого i: если $m + 1 \leq$ i $<$ $n + 1$ и $X$(i)=1, то $X$(i+1)=0 (из (4)).

(12) $i < n$ (допущение).

(13) $i + 1 < n + 1$ (из (12)).

(14) $m+1 \leq i$ (из (7)).

(15) $m+1 \leq i+1$ (из (14)).

(16) $m+1 \leq i+1 < n+1$ (из (13) и (15)).

(17) $X(i+1) = 1$ (из (8) и (9)).

Разумеется, что (18) $i+1$ есть целое число.

(19) $X(i+2) = 0$ (из (11), (16), (17) и (18)).

(20) $Z(i+1) = 0$ (из (3), (13) и (19)).

Снимая допущение (12), получаем, что

(21) если $i < n$, то $Z(i+1) = 0$.

(22) $i = n$ (допущение).

(23) $Z(n) = 1$ (из (8) и (22)).

(24) $Z(n){=}X(n{+}1)$ (из (9) и (22)).

(25) $X(n{+}1){=}1$ (из (23) и (24)).

(26) $Z(n{+}1){=}0$ (из (3) и (25)).

(27) $Z(i{+}1){=}0$ (из (22) и (26)).

Снимая допущение (22), получаем, что

(28) если $i = n$, то $Z(i{+}1){=}0$.

(29) $Z(i{+}1){=}0$ (из (10), (21) и (28)).

Снимая допущения (6) и (5) и обобщая, получаем, что

(30) для всякого целого числа i: если $m+1 \leq \mathrm{i} < n+1$ и $Z(\mathrm{i}){=}1$, то $Z(i{+}1){=}0$.

(31) $Z$ есть отображение множества $\{1, \ldots, n, n{+}1\}$ в множество $\{0,1\}$ (из (3)).

(32) $Z$ есть $\langle m,n\rangle$-кортеж (из (30) и (31), по определению 6).

Снимая допущение (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 5. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для всяких $\langle m,n\rangle$-кортежей X и Y существует единственный $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle$X, Y$\rangle$.*

Докажем лемму 6.

(1) $X$ и $Y$ являются $\langle m,n\rangle$-кортежами (допущение).

(2) $X(1)=1$ и $Y(1)=1$ (допущение).

(3) $1_{\langle m,n\rangle}$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$ (из (1) и (2), по определению 12).

(4) Существует $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$ (из (3)).

Снимая допущение (2), получаем, что

(5) если $X(1)=1$ и $Y(1)=1$, то существует $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$.

(6) $X(1)\neq 1$ или $Y(1)\neq 1$ (допущение).

(7) $0_{\langle m,n\rangle}$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$ (из (1) и (6), по определению 12).

(8) Существует $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$ (из (7)).

Снимая допущение (6), получаем, что

(9) если $X(1)\neq 1$ или $Y(1)\neq 1$, то существует $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$.

(10) Существует $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X,Y\rangle$ (из (5) и (9)).

(11) $Z_1$ и $Z_2$ являются $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарниками упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$ (допущение).

(12) ($Z_1 = 1_{\langle m,n\rangle}$, $X(1){=}1$, $Y(1){=}1$) или ($Z_1 = 0_{\langle m,n\rangle}$, $X(1){\neq}1$ или $Y(1){\neq}1$) (из (1) и (11), по определению 12).

(13) ($Z_2 = 1_{\langle m,n\rangle}$, $X(1){=}1$, $Y(1){=}1$) или ($Z_2 = 0_{\langle m,n\rangle}$, $X(1){\neq}1$ или $Y(1){\neq}1$) (из (1) и (11), по определению 12).

В свете утверждений (12) и (13) ясно, что верны следующие утверждения (14) и (15).

(14) Если $X(1){=}1$ и $Y(1){=}1$, то $Z_1 = Z_2$.

(15) Если $X(1){\neq}1$ или $Y(1){\neq}1$, то $Z_1 = Z_2$.

(16) $Z_1 = Z_2$ (из (14) и (15)).

Снимая допущение (11) и обобщая, получаем, что

(17) для всяких $\mathrm{Z}_1$ и $\mathrm{Z}_2$: если $\mathrm{Z}_1$ и $\mathrm{Z}_2$ являются $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарниками упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, то $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_2$.

В свете утверждений (10) и (17) ясно, что

(18) существует единственный $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$.

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 6. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y существует единственный $\vee_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$.

Можно построить доказательство леммы 7, аналогичное данному выше доказательству леммы 6.

Лемма 8. Для всяких $\langle m, n\rangle$-кортежей X и Y существует единственный $\supset_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$.

Можно построить доказательство леммы 8, аналогичное данному выше доказательству леммы 6.

Лемма 9. Для всякого $\langle m,n\rangle$-кортежа X существует единственный $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа X.

Докажем лемму 9.

(1) $X$ есть $\langle m,n\rangle$-кортеж (допущение).

Разумеется, что (2) множество $\{\langle 1,X(2)\rangle,\dots,\langle n,X(n{+}1)\rangle,\langle n{+}1,1\rangle\}$ и множество $\{\langle 1,X(2)\rangle,\dots,,X(n+1)\rangle,\langle n+1,0\rangle\}$ являются отображениями множества $\{1,\dots,\ n,\ n{+}1\}$ в множество $\{0,1\}$.
Ясно, что (3)$X(n{+}1){=}0$ или $X(n{+}1){=}1$.

(4) $X(1){=}0$ (допущение).

Опираясь на утверждения (1), (2), (4) и на определение 15, получаем, что

(5) множество $\{\langle 1,X(2)\rangle,\dots,\langle n,X(n+1)\rangle,\langle n+1,1\rangle\}$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$.

(6) Существует $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$ (из (5)).

Снимая допущение (4), получаем, что

(7) если $X(1){=}0$, то существует $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$.

(8) $X(1){=}1$ (допущение).

Опираясь на утверждения (1), (2), (4) и на определение 15, получаем, что

(9) множество $\{\langle 1,X(2)\rangle,\dots,\langle n,X(n+1)\rangle,\langle n+1,0\rangle\}$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$.

(10) Существует $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$ (из (9)).

Снимая допущение (8), получаем, что

(11) если $X(1){=}1$, то существует $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$.

(12) Существует $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$ (из (3), (7) и (11)).

(13) $Z_1$ и $Z_2$ являются $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарниками $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$ (допущение).

(14) $Z_1 \neq Z_2$ (допущение).

Опираясь на утверждения (13) и (14) и на определение 15, получаем, что

(15) существует такое i из $\{1,\ldots, n, n+1\}$, что $Z_1$(i)$\neq$ $Z_2$(i).

Пусть (16) $i \in \{1,\ldots, n, n+1\}$, $Z_1(i)\neq Z_2(i)$.

(17) $i \in \{1,\ldots, n, n+1\}$ (из (16)).

(18) $Z_1(i)\neq Z_2(i)$ (из (16)).

(19) $i \in \{1,\ldots, n\}$ или $i = n+1$ (из (18)).

(20) $i \in \{1,\ldots, n\}$ (допущение).

(21) $Z_1(i)= X(i+1)$ и $Z_2(i)= X(i+1)$ (из (13) и (20), по определению 15).

(22) $Z_1(i)= Z_2(i)$ (из (21)).

Утверждение (22) противоречит утверждению (18). Следовательно, неверно допущение (20). Итак, (23) неверно, что $i \in\{1,\ldots, n\}$.

(24) $i = n+1$ (из (19) и (23)).

(25) $X(n+1)=0$ (допущение).

(26) $Z_1(n+1)=1$ и $Z_2(n+1)=1$ (из (13) и (25), по определению 15).

(27) $Z_1(i)=1$ и $Z_2(i)=1$ (из (24) и (26)).

(28) $Z_1(i)=Z_2(i)$ (из (27)).

Утверждение (28) противоречит утверждению (18). Следовательно, неверно допущение (25). Итак, (29) неверно, что $X(n + 1) = 0$.

(30) $X(n+1)=1$ (из (3) и (29)).

(31) $Z_1(n{+}1){=}0$ и $Z_2(n{+}1){=}0$ (из (13) и (30), по определению 15).

(32) $Z_1(i){=}0$ и $Z_2(i){=}0$ (из (24) и (31)).

(33) $Z_1(i){=}\ Z_2(i)$ (из (32)).

Утверждение (33) противоречит утверждению (18). Следовательно, неверно допущение (14). Итак, (34) $Z_1 = Z_2$.

Снимая допущение (13) и обобщая, получаем, что

(35) для всякого $\mathrm{Z}_1$ и для всякого $\mathrm{Z}_2$: если $\mathrm{Z}_1$ и $\mathrm{Z}_2$ являются $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарниками $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$, то $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_2$.

Опираясь на утверждения (12) и (35), получаем, что

(36) существует единственный $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$.

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 9. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. $\&_{\langle m,n\rangle}$ есть бинарная операция на $C_{\langle m,n\rangle}$.

Докажем лемму 10.

Согласно стандартному определению бинарной операции на заданном множестве, для доказательства леммы 10 достаточно доказать следующие утверждения (А), (Б) и (В)[2].

(А) $\&_{\langle m,n\rangle}$ включается в декартово произведение $C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$,

(Б) для всяких X и Y из $C_{\langle m,n\rangle}$ существует такой Z, что $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$,

(В) для всяких X, Y, $\mathrm{Z}_1$ и $\mathrm{Z}_2$: если $\langle \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z}_1\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$ и $\langle \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z}_2\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$, то $\mathrm{Z}_1{=}\mathrm{Z}_2$.

[2]Определение, о котором идет речь, гласит, что $f$ есть бинарная операция на множестве $M$, если выполняются следующие условия (i), (ii) и (iii): (i) $f$ включается в декартово произведение $M \times M \times M$, (ii) для всяких x и y из $M$ существует такой z, что $\langle$ x, y, z $\rangle \in f$, (iii) для всяких x, y, $\mathrm{z}_1$ и $\mathrm{z}_2$: если $\langle$ x, y, $\mathrm{z}_1$ $\rangle \in f$ и $\langle$ x, y, $\mathrm{z}_2$ $\rangle \in f$, то $\mathrm{z}_1{=}\mathrm{z}_2$.

Докажем утверждение (A).

(1) $a \in \&_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (1) и соглашение 9, получаем, что

(2) $a$ принадлежит множеству всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle X, Y, Z\rangle$, где $X$ и $Y$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, а $Z$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$.

(3) Существуют X, Y и Z, выполняющие условие: $a = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\rangle$, X и Y являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, Z есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$ (из (2)).

Пусть (4) $a = \langle X, Y, Z\rangle$, $X$ и $Y$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, $Z$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$.

(5) $a = \langle X, Y, Z\rangle$ (из (4)).

(6) $X$ и $Y$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами (из (4)).

(7) $Z$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$ (из (4)).

(8) $Z$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж (из (6) и (7), по лемме 2).

Опираясь на утверждения (6), (8) и замечание 4, получаем, что

(9) $X, Y$ и $Z \in C_{\langle m,n\rangle}$.

В свете утверждения (9) ясно, что

(10) $\langle X, Y, Z\rangle \in C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$.

(11) $a \in C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$ (из (5) и (10)).

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что

(12) для всякого a: если a $\in \&_{\langle m,n\rangle}$, то a $\in C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$.

Опираясь на утверждение (12) и определение теоретико-множественного включения, получаем, что $\&_{\langle m,n\rangle}$ включается в $C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$.
Утверждение (А) доказано.

Докажем утверждение (Б).

(1) $X, Y \in C_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (1) и замечание 4, получаем, что

(2) $X$ и $Y$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами.

(3) Существует единственный $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$ (из (2), по лемме 6).

Пусть (4) $Z$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$. Разумеется, что (5) существует единственная упорядоченная тройка, первый член которой есть $X$, второй — $Y$, третий — $Z$.

В свете утверждений (2), (4), (5) и соглашения 9 ясно, что

(6) $\langle X, Y, Z\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$.

(7) Существует такой Z, что $\langle X, Y, \mathrm{Z}\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$ (из (6)).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (Б).
Утверждение (Б) доказано.

Докажем утверждение (В).

(1) $\langle X, Y, Z_1\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$ и $\langle X, Y, Z_2\rangle \in \&_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (1) и соглашение 9, получаем, что

(2) $X$ и $Y$ являются $\langle m, n\rangle$-кортежами, $Z_1$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$, $Z_2$ есть $\&_{\langle m,n\rangle}$-напарник упорядоченной пары $\langle X, Y\rangle$.

Опираясь на утверждение (2) и используя лемму 6, получаем, что

(3) $Z_1 = Z_2$.

Снимая допущения (1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (В).

Утверждение (В) доказано.

Лемма 10 доказана.

Лемма 11. $\vee_{\langle m,n\rangle}$ есть бинарная операция на $C_{\langle m,n\rangle}$.

Используя лемму 3 и лемму 7, можно построить доказательство леммы 11, аналогичное данному выше доказательству леммы 10.

Лемма 12. $\supset_{\langle m,n\rangle}$ есть бинарная операция на $C_{\langle m,n\rangle}$.

Используя лемму 4 и лемму 8, можно построить доказательство леммы 12, аналогичное данному выше доказательству леммы 10.

Лемма 13. $\neg_{\langle m,n\rangle}$ есть унарная операция на $C_{\langle m,n\rangle}$.

Докажем лемму 13.

Согласно стандартному определению унарной операции на заданном множестве, для доказательства леммы 13 достаточно доказать следующие утверждения (А), (Б) и (В)[3].

(А) $\neg_{\langle m,n\rangle}$ включается в декартово произведение $C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$,

(Б) для всякого X из $C_{\langle m,n\rangle}$ существует такой Z, что $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Z}\rangle \in \neg_{\langle m,n\rangle}$,

(В) для всяких X, $\mathrm{Z}_1$ и $\mathrm{Z}_2$: если $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Z}_1\rangle \in \neg_{\langle m,n\rangle}$ и $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Z}_2\rangle \in \neg_{\langle m,n\rangle}$, то $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_2$.

Докажем утверждение (А).

(1) $a \in \neg_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

[3] Определение, о котором идет речь, гласит, что $f$ есть унарная операция на множестве $M$, если выполняются следующие условия (i), (ii) и (iii): (i) $f$ включается в декартово произведение $M \times M$, (ii) для всякого x из $M$ существует такой z, что $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z}\rangle \in f$, (iii) для всяких x, $\mathrm{z}_1$ и $\mathrm{z}_2$: если $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z}_1\rangle \in f$ и $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z}_2\rangle \in f$, то $\mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2$.

Опираясь на утверждение (1) и соглашение 12, получаем, что

(2) $a$ принадлежит множеству всех упорядоченных пар, каждая из которых имеет вид $\langle X, Z\rangle$, где $X$ есть $\langle m,n\rangle$-кортеж, а $Z$ есть $\langle m,n\rangle$-напарник $\neg_{\langle m,n\rangle}$-кортежа $X$.

(3) Существуют X и Z, выполняющие условие: $a = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Z}\rangle$, X есть $\langle m,n\rangle$-кортеж, а Z есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа X (из (2)).

Пусть (4) $a = \langle X, Z\rangle$, $X$ есть $\langle m,n\rangle$-кортеж, $Z$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$.

(5) $a = \langle X, Z\rangle$ (из (4)).

(6) $X$ есть $\langle m,n\rangle$-кортеж (из (4)).

(7) $Z$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m,n\rangle$-кортежа $X$ (из (4)).

(8) $Z$ есть $\langle m,n\rangle$-кортеж (из (6) и (7), по лемме 5).

Опираясь на утверждения (6), (8) и замечание 4, получаем, что

(9) $X, Z \in C_{\langle m,n\rangle}$.

В свете утверждения (9) ясно, что

(10) $\langle X, Z\rangle \in C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$.

(11) $a \in C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$ (из (5) и (10)).

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что

(12) для всякого a: если a $\in \neg_{\langle m,n\rangle}$, то a $\in C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$.

Опираясь на утверждение (12) и определение теоретико-множественного включения, получаем, что $\neg_{\langle m,n\rangle}$ включается в $C_{\langle m,n\rangle} \times C_{\langle m,n\rangle}$.
Утверждение (А) доказано.

Докажем утверждение (Б).

(1) $X \in C_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (1) и замечание 4, получаем, что

(2) $X$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж.

(3) Существует единственный $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа $X$ (из (2), по лемме 9).

Пусть (4) $Z$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа $X$.
Разумеется, что (5) существует единственная упорядоченная пара, первый член которой есть $X$, второй $-Z$.
В свете утверждений (2), (4), (5) и соглашения 12 ясно, что

(6) $\langle X, Z\rangle \in \neg_{\langle m,n\rangle}$.

(7) Существует такой Z, что $\langle X, \mathrm{Z}\rangle \in \neg_{\langle m,n\rangle}$ (из (6)).

Снимая допущение (1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (Б).

Утверждение (Б) доказано.

Докажем утверждение (В).

(1) $\langle X, Z_1\rangle \in \neg_{\langle m,n\rangle}$ и $\langle X, Z_2\rangle \in \neg_{\langle m,n\rangle}$ (допущение).

Опираясь на утверждение (1) и соглашение 12, получаем, что

(2) $X$ есть $\langle m, n\rangle$-кортеж, $Z_1$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа $X$, $Z_2$ есть $\neg_{\langle m,n\rangle}$-напарник $\langle m, n\rangle$-кортежа $X$.

Опираясь на утверждение (2) и используя лемму 9, получаем, что

(3) $Z_1 = Z_2$.

Снимая допущения (1) и обобщая, завершаем доказательство утверждения (В).

Утверждение (В) доказано.

Лемма 13 доказана.

Разумеется, существует единственная упорядоченная четверка, первый член которой есть $\&_{\langle m,n\rangle}$, второй — $\vee_{\langle m,n\rangle}$, третий — $\supset_{\langle m,n\rangle}$, а четвертый — $\neg_{\langle m,n\rangle}$, и существует единственная упорядоченная тройка, первый член которой есть $C_{\langle m,n\rangle}$, второй — $D_{\langle m,n\rangle}$, а третий — $\langle\&_{\langle m,n\rangle}, \vee_{\langle m,n\rangle}, \supset_{\langle m,n\rangle}, \neg_{\langle m,n\rangle}\rangle$.

Замечание 7. В свете того, что множество $D_{\langle m,n\rangle}$ включается в множество $C_{\langle m,n\rangle}$, а $\&_{\langle m,n\rangle}, \vee_{\langle m,n\rangle}, \supset_{\langle m,n\rangle}$ и $\neg_{\langle m,n\rangle}$ — операции на множестве $C_{\langle m,n\rangle}$, ясно, что $\langle C_{\langle m,n\rangle}, D_{\langle m,n\rangle}, \langle\&_{\langle m,n\rangle}, \vee_{\langle m,n\rangle}, \supset_{\langle m,n\rangle}, \neg_{\langle m,n\rangle}\rangle\rangle$ является логической матрицей.

Соглашение 13. Логическую матрицу $\langle C_{\langle m,n\rangle}, D_{\langle m,n\rangle}, \langle\&_{\langle m,n\rangle}, \vee_{\langle m,n\rangle}, \supset_{\langle m,n\rangle}, \neg_{\langle m,n\rangle}\rangle\rangle$ обозначаем через $\mathfrak{M}(m,n)$ и называем $\langle m,n\rangle$-матрицей.

Соглашение 14. Результат применения операций $\bullet$ из $\{\&_{\langle m,n\rangle}, \vee_{\langle m,n\rangle}, \supset_{\langle m,n\rangle}\}$ к упорядоченной паре $\langle X,Y\rangle$ элементов множества $C_{\langle m,n\rangle}$ обозначаем через $(X \bullet Y)$, а результат применения операции $\neg_{\langle m,n\rangle}$ к элементу $X$ множества $C_{\langle m,n\rangle}$ обозначаем через $\neg_{\langle m,n\rangle}(X)$.

Определение 16. Называем $\mathfrak{M}(m,n)$-оценкой (или оценкой в $\mathfrak{M}(m,n)$) отображение множество всех пропозициональных переменных языка $L$ в $C_{\langle m,n\rangle}$.

Определение 17. Называем $\mathfrak{M}(m,n)$-означиванием при $\mathfrak{M}(m,n)$-оценке $\rho$ такое отображение $g$ множества всех $L$-формул в множество $C_{\langle m,n\rangle}$, что выполняются следующие условия:

(1) для всякой пропозициональной переменной q языка $L$ $g(\mathrm{q})=\rho(\mathrm{q})$;

(2) для всяких $L$-формул A и B:

$g((\mathrm{A}\&\mathrm{B}))=(g(\mathrm{A})\&_{\langle m,n\rangle}g(\mathrm{B}))$,

$g((\mathrm{A}\vee\mathrm{B}))=(g(\mathrm{A})\vee_{\langle m,n\rangle}g(\mathrm{B}))$,

$g((\mathrm{A}\supset\mathrm{B}))=(g(\mathrm{A})\supset_{\langle m,n\rangle} g(\mathrm{B}))$,

$g((\neg\mathrm{A}))=\neg_{\langle m,n\rangle}(g(\mathrm{A}))$.

Замечание 8. Можно доказать, что для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ существует единственное $\mathfrak{M}(m,n)$-означивание при ρ.

Соглашение 14. Обозначаем через $|\,|_{\rho}^{\langle m,n\rangle}$ $\mathfrak{M}(m,n)$-означивание при $\mathfrak{M}(m,n)$-оценке $\rho$, а результат применения $|\,|_{\rho}^{\langle m,n\rangle}$ к $L$-формуле $A$ обозначаем через $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle}$.

Определение 18. Называем $A$ $\mathfrak{M}(m,n)$-общезначимой (или общезначимой в $\mathfrak{M}(m,n)$) $L$-формулой, если для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки $\rho$ $|A|_{\rho}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$.

Определение 19. Говорим, что $A$ $\mathfrak{M}(m,n)$-следует из $M$ (или из $M$ $\mathfrak{M}(m,n)$-следует $A$), если выполняются три условия: (1) $A$ есть $L$-формула, (2) $M$ есть множество $L$-формул, (3) для всякой $\mathfrak{M}(m,n)$-оценки ρ верно, что если $|\mathrm{B}|_{\rho}{}^{\langle m,n\rangle} \in D_{\langle m,n\rangle}$ для всякой $L$-формулы B из $M$, то $|A|_{\rho}{}^{\langle m,n\rangle}$.

Определение 20. Называем $v$-$q$-кортежем (где $v$ есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка, а $q$ есть пропозициональная переменная языка $L$) такое отображение $\phi$ множества $\{1,\ldots,n,n{+}1\}$ на множество $\{v(\neg^{[0]}(q)),\ldots,v(\neg^{[n-1]}(q)), v(\neg^{[n]}(q))\}$, что для всякого i из $\{1,\ldots,n,n+1\}$ $\phi(\mathrm{i}) = v(\neg^{[\mathrm{i}-1]}(q))$.

Замечание 9. Понятно, что для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v и для всякой пропозициональной переменной q языка $L$ существует единственный v-q-кортеж.

Соглашение 15. Условимся обозначать $v$-$q$-кортеж (где $v$ есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка, а $q$ есть пропозициональная переменная языка $L$) через ($v$-$q$-cort).

Лемма 14. Для всякой $I_{\langle m,n\rangle}$-оценки v и для всякой пропозициональной переменной q языка $L$ (v-q-cort) есть $\langle m,n\rangle$-кортеж.

Докажем лемму 14.

(1) $v$ есть $I_{\langle m,n\rangle}$-оценка (допущение).

(2) $q$ есть пропозициональная переменная языка $L$ (допущение).

(3) ($v$-$q$-cort) есть $v$-$q$-кортеж (из (1) и (2), по соглашению 15).

(4) ($v$-$q$-cort) есть отображение множества $\{1,\ldots, n, n{+}1\}$ в множество $\{v(\neg^{[0]}(q)),\ldots,\ v(\neg^{[n-1]}(q)),\ v(\neg^{[n]}(q))\}$ (из (3), по определению 20).

Разумеется, что (5)$\neg^{[0]}(q),\ldots,\ \neg^{[n-1]}(q),\ \neg^{[n]}(q)$ являются квазиэлементарными $L$-формулами, длина каждой из которых $\leq n$.

(6) $v$ есть $I_{\langle m,n\rangle}$-предоценка (из (1), по определению 2).

(7) $v$ есть отображение множества всех квазиэлементарных $L$-формул, длина каждой из которых $\leq n$, в множество $\{0,1\}$ (из (6), по определению 1).

(8) $v(\neg^{[0]}(q)){\in}\{0,1\},\ldots,\ v(\neg^{[n-1]}(q)){\in}\{0,1\},\ v(\neg^{[n]}(q)){\in}\{0,1\}$ (из (5) и (6)).

Опираясь на утверждение (8), получаем, что

(9) множество $\{v(\neg^{[0]}(q)),\ldots, v(\neg^{[n-1]}(q)), v(\neg^{[n]}(q))\}$ включается в множество $\{0,1\}$.

В свете утверждений (4) и (9) ясно, что

(10) ($v$-$q$-cort) есть отображение множества $\{1,\ldots, n, n{+}1\}$ в множество $\{0,1\}$.

(11) $i$ есть целое число (допущение).

(12) $m{+}1{\leq}\ i < n{+}1$ и ($v$-$q$-cort)($i$)=1 (допущение).

(13) $m{+}1{\leq}\ i < n{+}1$ (из (12)).

(14) ($v$-$q$-cort)($i$)=1 (из (12)).

(15) ($v$-$q$-cort)($i$)= $v(\neg^{[n-1]}(q))$ (из (1), (2), с использованием определения 20 и соглашения 15).

(16) $v(\neg^{[n-1]}(q))$=1 (из (14) и (15)).

(17) $m \leq i - 1 < n$ (из (13).

Ясно, что (18) $h(\neg^{[i-1]}(q)) = i - 1$.

(19) $m \leq h(\neg^{[i-1]}(q)) < n$ (из (17) и 18)).

(20) $v((\neg\neg^{[i-1]}(q)))$=0 (из (1), (16) и (19), по определению 2).

Разумеется, что (21) $(\neg\neg^{[i-1]}(q))$ есть $\neg^{[i]}(q)$.

(22) $v(\neg^{[i]}(q))$=0 (из (20) и (21)).

Опираясь на утверждение (11) и (13), получаем, что

(23) $i$+1$\in \{1,\ldots, n, n$+1$\}$.

(24) ($v$-$q$-cort)($i$+1)=$v(\neg^{[i]}(q))$ (из (1) и (2), по определению 20 и по соглашению 15).

(25) ($v$-$q$-cort)($i$+1)=0 (из (22) и (24)).

Снимая допущение (12), получаем, что

(26) если $m$+1$\leq i < n$+1 и ($v$-$q$-cort)($i$)=1, то ($v$-$q$-cort)($i$+1)=0.

Снимая допущение (11) и обобщая, получаем, что

(27) для всякого целого числа i: если $m + 1 \leq$ i $< n + 1$ и ($v$-$q$-cort)(i)=1, то ($v$-$q$-cort)(i+1)=0.

(28) ($v$-$q$-cort) есть $\langle m, n\rangle$-кортеж (из (10) и (27), по определению 6).

Снимая допущения (2) и (1) и обобщая, завершаем доказательство леммы 14.
Лемма 14 доказана.

Продолжение статьи планируется к публикации в следующем номере «Логических исследований».

## Литература

[1] *Попов В. М.* Секвенциальная аксиоматизация и семантика $I$-логик васильевского типа // Логические исследования 2016. Т. 22. № 1. С. 33–69.

Popov V.M

# To the Problem of Characterization of Logic of the Vasiliev Type: on Tabularity $I_{\langle x,y\rangle}(x, y \in$ {0, 1, 2,...} and $x < y$). Part I

**Popov Vladimir Mikhailovich**
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University
Lomonosovsky prospect, 27–4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: pphiloslog@mail.ru

In this article, continuing the work carried out in [1], the problem of tabularity of the $I$-logics of the Vasiliev type (propositional logic is called tabular if it has a finite characteristic matrix). The main result obtained in this article: for any non-negative integers x and y, the first of which is less than the second, the logic $I_{\langle \mathrm{x,y}\rangle}$ is tabular (the class of all such logics is an infinite subclass of the class of all $I$-logics of the Vasiliev type). The proposed study is based on the use of the results obtained in [1], and on the use of the authors' "cortege semantics". To achieve the above main result, we show how on arbitrary nonnegative integer numbers $m$ and $n$, satisfying the inequality $m < n$, is constructed logic matrix $\mathfrak{M}(m, n)$, which is the finite characteristic matrix of logic $I_{\langle m,n\rangle}$. Since the carrier of the logical matrix $\mathfrak{M}(m, n)$ is some set of 0-1-corteges, the semantics based on this logical matrix is naturally called the cortege semantics. Important note: the article is published in two parts. Before you the first part of the article, the second part of the article is planned to be published in the second issue of "Logical Investigations" for 2017.

*Keywords:* $I$-logic $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ and $m < n)$, the two-valued semantics of the $I$-logic $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ and $m < n)$, the cortege semantics of the $I$-logic $I_{\langle m,n\rangle}(m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ and $m < n)$

## References

[1] Popov, V.M. "Sekventsial'naya aksiomatizatsiya i semantika $I$-logik vasil'evskogo tipa" [Sequential axiomatization and semantics $I$-logic of the Vasiliev type], *Logicheskie issledovaniya* [Logical research], 2016, Vol. 22, No. 1, pp. 33–69. (In Russian)