Логические исследования
2016. Т. 22. № 1. С. 32–69
УДК 164.07+510.649

Logical Investigations
2016, vol. 22, no 1, pp. 32–69

В.М. Попов

Секвенциальная аксиоматизация и семантика I-логик васильевского типа[1]

Попов Владимир Михайлович
Кафедра логики, философский факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова.
119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1,
Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4.
E-mail: pphiloslog@mail.ru

Изучаемые здесь I-логики васильевского типа были найдены в процессе экспликации некоторых идей российского логика и философа Николая Александровича Васильева, лежащих в основе его «воображаемой логики». Целью этой статьи является демонстрация того, как конструировать простые и удобные для поиска доказательства секвенциальные аксиоматизации I-логик васильевского типа и как строить интуитивно ясные двузначные семантики, адекватные I-логикам васильевского типа. В предлагаемой статье определяются I-логики васильевского типа, строятся их секвенциальные аксиоматизации, даются необходимые семантические определения и доказываются теорема об оправданности $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводов (теорема 5) и теорема о полноте $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводов (теорема 6). Работа завершается рядом следствий из указанных теорем и анонсом решения проблемы табличности I-логик васильевского типа.

Ключевые слова: I-логика васильевского типа, секвенциальная аксиоматизация I-логик васильевского типа, семантика I-логик васильевского типа

В [12] определяется для произвольных x и y из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ логика $I_{\langle x,y\rangle}$. Логики этого вида используются в [13] при иллюстрации действия обобщенной теоремы Гливенко. Различные естественные подклассы класса всех таких логик рассматриваются, например, в работах [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]. В предлагаемой статье изучаются I-логики васильевского типа. I-логикой васильевского типа называем такую логику $I_{\langle x,y\rangle}$, что x и y принадлежат множеству $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ и при этом x или y не равно 0. Можно показать, что с помощью I-логик васильевского типа эксплицируются некоторые логические построения, проводимые в [1] и в ряде других работ Николая Александровича Васильева. Начало подобного рода экспликациям положено Аидой Арруда в [15]. Исследуя идеи, фундирующие «воображаемую логику» Н.А. Васильева, А. Арруда пришла в [15] к трехзначной пропозициональной

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 13-03-00088а.

логике (аксиоматизирована в [15] посредством исчисления V1), имитирующей на пропозициональном уровне ряд важных черт «воображаемой логики». Трехзначная логика, детерминированная исчислением V1, тесно связана с логикой $I_{\langle 1,0\rangle}$ (понятно, что $I_{\langle 1,0\rangle}$ является I-логикой васильевского типа) — можно доказать, что логика $I_{\langle 1,0\rangle}$ равна (с точностью до обозначений) множеству всех таких V1-доказуемых формул, ни одна из которых не имеет вхождений так называемых «классических пропозициональных переменных». Заметим, что множество всех пропозициональных переменных языка исчисления V1 разбито (см. [15]) на два множества. В [15] А. Арруда называет элементы одного из этих множеств классическими пропозициональными переменными, а элементы другого — васильевскими пропозициональными переменными.

В статье основное внимание уделено двум проблемам — проблеме секвенциальных аксиоматизаций I-логик васильевского типа и проблеме построения двузначных семантик, адекватных I-логикам васильевского типа.

Главные из полученных здесь результатов: (1) описан метод построения по всяким x и y из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ свободной от сечения секвенциальной аксиоматизации логики $I_{\langle x,y\rangle}$, (2) описан метод построения по всяким x и y из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ двузначной семантики, адекватной логике $I_{\langle x,y\rangle}$.

Язык L всех рассматриваемых здесь логик есть стандартно определяемый пропозициональный язык, алфавиту которого принадлежат в точности следующие символы: $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (пропозициональные переменные языка L) $\&, \vee, \supset$, (бинарные логические связки языка L), $\neg$ (унарная логическая связка языка L), левая и правая круглые скобки. Определение L-формулы индуктивно: (1) всякая пропозициональная переменная языка L есть L-формула, (2) если A и B являются L-формулами, то $(A \& B), (A \vee B), (A \supset B)$, и $(\neg A)$ являются L-формулами, (3) ничто другое не является L-формулой. Квазиэлементарной L-формулой называем L-формулу, в которую не входит ни одна бинарная логическая связка языка L. Длиной L-формулы называем число всех вхождений символов $\&, \vee, \supset, \neg$ в эту L-формулу. Ясно, что для всякой L-формулы существует единственная длина этой L-формулы, и что длина всякой L-формулы есть целое неотрицательное число. Условимся обозначать длину L-формулы A через $h(A)$. Логикой называем непустое множество L-формул, замкнутое относительно modus ponens в L и относительно правила подстановки L-формулы вместо пропозициональной переменной языка L. Теорией логики L называем множество L-формул, включающее логику L и замкнутое относительно modus ponens в L. Понятно, что множество всех L-формул является логикой, а также теорией любой логики. Множество всех L-формул называем тривиальной теорией. Противоречивой теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для некоторой L-формулы A верно: A $\in$ T и $(\neg$A$)$ $\in$ T. Паранепротиворечивой теорией логики L называем такую противоречивую теорию T логики L, что T не есть тривиальная теория. Паранепротиворечивой логикой называем такую логику L, что существует паранепротиворечивая теория логики L. Полной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что для всякой L-формулы A верно следующее: A $\in$ T или $(\neg$A$)$ $\in$ T. Параполной теорией логики L называем такую теорию T логики L, что T не является полной теорией логики L и всякая полная теория логики L, включающая T, есть тривиальная теория. Параполной логикой называем такую логику L, что существует параполная теория логики L. Паралогикой называем такую логику, которая является паранепротиворечивой логикой или/и параполной логикой. Паранормальной логикой называем такую логику, которая является паранепротиворечивой логикой и параполной логикой.

Условимся, что на протяжении всей статьи α и β — произвольные фиксированные числа из $\{0, 1, 2, \ldots \omega\}$. Построим исчисление $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ гильбертовского типа. Язык исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть L. Аксиомами исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ являются все те и только те L-формулы, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих двенадцати видов (здесь A, B и C — L-формулы):

(I) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$,

(II) $(A \supset (A \vee B))$,

(III) $(B \supset (A \vee B))$,

(IV) $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,

(V) $((A \& B) \supset A)$,

(VI) $((A \& B) \supset B)$,

(VII) $((C \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset (A \& B))))$,

(VIII) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \& B) \supset C))$,

(IX) $(((A \& B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)))$,

(X) $(((A \supset B) \supset A) \supset A)$,

(XI,α) $((\neg D) \supset (D \supset A))$, где D есть L-формула, которая не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$,

(XII,β) $((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))$, где E есть L-формула, которая не является квазиэлементарной L–формулой длины $< \beta$.

Исчисление $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ имеет единственное правило — modus ponens в L.

Напомним, что правило modus ponens в L есть множество всех упорядоченных троек, каждая из которых имеет вид $\langle A, (A \supset B), B\rangle$, где A и B являются L-формулами. Правило modus ponens в L обозначаем через MP_L.

Определение 1. Называем $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательством длины n (n есть целое положительное число) L-формулы A такую n-членную последовательность L-формул с первым членом $A_1, \ldots$, с n-ным членом A_n, что выполняются условия (I) и (II): (I) A_n есть A, (II) для всякого целого положительного числа i, которое меньше или равно n, верно, что A_i есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ или существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_i\rangle \in \mathrm{MP}_L$.

Определение 2. Называем Д $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательством L-формулы A, если существует такое целое положительное число n, что Д есть $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательство длины n L-формулы A.

Определение 3. Называем $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводом длины n (n есть целое положительное число) из множества M L-формул L-формулы A такую n-членную последовательность L-формул с первым членом $A_1, \ldots$, с n-ным членом A_n, что выполняются условия (I) и (II): (I) A_n есть A, (II) для всякого целого положительного числа i, которое меньше или равно n, верно хотя бы одно из следующих трех условий: (1) $A_i \in M$, (2) A_i есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, (3) существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle A_k, A_l, A_i\rangle \in \mathrm{MP}_L$.

Определение 4. Называем Д $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводом из множества M L-формул L-формулы A, если существует такое целое положительное число n, что Д есть $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-вывод длины n из множества M L-формул L-формулы A.

Условимся о том, что для всякого множества K L-формул и всякой L-формулы F запись «K $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ F» есть сокращение для «существует $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-вывод из множества K L-формул L-формулы F», а запись «$\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ F» есть сокращение для «существует $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-доказательство L-формулы F».

Определение 5. Называем L-формулу A L-формулой, доказуемой в $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, если $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$.

Условимся через $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ обозначать множество всех L-формул, доказуемых в $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. Опираясь на соответствующие определения и введенные выше соглашения, а также на тот факт, что для всяких L–формул A, B и C L-формулы (A $\supset$ A), (A $\supset$ (B $\supset$ A)) и ((A $\supset$ (B $\supset$ C)) $\supset$ ((A $\supset$ B) $\supset$ (A $\supset$ C))) доказуемы в $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, можно стандартно доказать следующую теорему дедукции для $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводов: для всякого множества M L-формул и для всяких L-формул A и B верно, что если M $\cup$ {A} $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ B, то M $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ (A $\supset$ B).

Доказаны нижеследующие утверждения (У1)–(У4).

(У1) $I_{\langle 0,0\rangle}$ есть классическая пропозициональная логика в языке L.

Здесь «классическая пропозициональная логика в языке L» означает множество всех классических тавтологий в языке L.

(У2) Для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ верно следующее: $x \neq 0$ тогда и только тогда, когда $I_{\langle x,y\rangle}$ есть паранепротиворечивая логика.

(У3) Для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ верно следующее: $y \neq 0$ тогда и только тогда, когда $I_{\langle x,y\rangle}$ есть параполная логика.

(У4) Для всяких x, y, z и u из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ верно следующее: $I_{\langle x,y\rangle}$ включается в $I_{\langle z,u\rangle}$ тогда и только тогда, когда $x \geq z$ и $y \geq u$.

В свете утверждений (У2) и(У3), а также данных выше определений, ясно, что верны утверждения (У5) и (У6).

(У5) Для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ верно следующее: $x \neq 0$ или $y \neq 0$ тогда и только тогда, когда $I_{\langle x,y\rangle}$ есть паралогика.

(У6) Для всяких x и y из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ верно следующее: $x \neq 0$ и $y \neq 0$ тогда и только тогда, когда $I_{\langle x,y\rangle}$ есть паранормальная логика.

Простым следствием утверждения (У4) является следующее утверждение (У7).

(У7) Для всяких x, y, z и u из $\{0, 1, 2, \dots \omega\}$ верно следующее: $I_{\langle x,y\rangle} = I_{\langle z,u\rangle}$ тогда и только тогда, когда $x = z$ и $y = u$.

Построим секвенциальное исчисление $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, аксиоматизирующее логику $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Алфавит **A** языка этого исчисления есть объединение алфавита языка L с двухэлементным множеством $\{\mathbf{,}, \rightarrow\}$ символов. Непустой последовательностью L-формул называем слово в алфавите **A**, имеющее вид $A_1\mathbf{,}\ldots\mathbf{,}A_n$, где n — целое положительное число, а $A_1, \ldots, A_n$ есть L-формулы. Заметим, что если $n = 1$, то $A_1\mathbf{,}\ldots\mathbf{,}A_n$ есть A_1. Пустой последовательностью L-формул называем пустое слово. Пустую последовательность L–формул обозначаем через Λ. Называем π последовательностью L-формул, если π есть пустая последовательность L-формул или непустая последовательность L-формул. Предполагается, что для всяких последовательностей π и ρ L-формул верно следующее: $\Lambda\mathbf{,}\pi$ есть π, $\pi\mathbf{,}\Lambda$ есть π, а $\pi\mathbf{,}\Lambda\mathbf{,}\rho$ есть $\pi\mathbf{,}\rho$. Ясно, что для всякого целого положительного числа k и для всяких последовательностей $\pi_1, \ldots, \pi_k$ L-формул слово $\pi_1\mathbf{,}\ldots\mathbf{,}\pi_k$ есть последовательность L-формул. Далее используем буквы Γ, Δ, Σ и Θ только для обозначения последовательностей L-формул.

Секвенцией называем слово в алфавите **A**, имеющее вид $\Gamma \rightarrow \Delta$. Для всякого целого положительного числа n называем n-посылочным секвенциальным правилом любое подмножество $n+1$-вой декартовой степени множества всех секвенций. Называем R секвенциальным правилом, если для некоторого целого положительного числа n R есть n-посылочное секвенциальное правило. Называем Π применением секвенциального правила R, если $\Pi \in \mathrm{R}$.

Множество всех основных секвенций исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть множество всех секвенций, каждая из которых имеет вид $A \rightarrow A$, где A есть L-формула.

Множество всех правил исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ является множеством всех определяемых ниже секвенциальных правил (R1)–(R14), (15.α), (16.β) и (17). В этих определениях A и B являются L-формулами.

(R1) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle\Gamma\mathbf{,}A\mathbf{,}B\mathbf{,}\Delta \rightarrow \Theta,\ \ \Gamma\mathbf{,}B\mathbf{,}A\mathbf{,}\Delta \rightarrow \Theta\rangle$,

(R2) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle\Gamma \rightarrow \Delta\mathbf{,}A\mathbf{,}B\mathbf{,}\Theta,\ \ \Gamma \rightarrow \Delta\mathbf{,}B\mathbf{,}A\mathbf{,}\Theta\rangle$,

(R3) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle A\mathbf{,}A\mathbf{,}\Gamma \rightarrow \Theta,\ \ A\mathbf{,}\Gamma \rightarrow \Theta\rangle$,

(R4) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle\Gamma \rightarrow \Theta\mathbf{,}A\mathbf{,}A,\ \ \Gamma \rightarrow \Theta\mathbf{,}A\rangle$,

(R5) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle\Gamma \rightarrow \Theta,\ \ A\mathbf{,}\Gamma \rightarrow \Delta\rangle$, (R6) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Theta,\ \ \Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}A\rangle$,

(R7) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle A\boldsymbol{,}\Gamma \to \Theta,\ \ (A\&B)\boldsymbol{,}\Gamma \to \Theta\rangle$,

(R8) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle A\boldsymbol{,}\Gamma \to \Theta,\ \ (B\&A)\boldsymbol{,}\Gamma \to \Theta\rangle$,

(R9) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}A,\ \ \Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}B,\ \ \Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}(A\&B)\rangle$,

(R10) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle A\boldsymbol{,}\Gamma \to \Theta,\ \ B\boldsymbol{,}\Gamma \to \Theta,\ \ (A \vee B)\boldsymbol{,}\Gamma \to \Theta\rangle$,

(R11) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}A,\ \ \Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}(A \vee B)\rangle$,

(R12) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}A,\ \ \Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}(B \vee A)\rangle$,

(R13) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}A,\ \ B\boldsymbol{,}\Sigma \to \Delta,\ \ (A \supset B)\boldsymbol{,}\Gamma\boldsymbol{,}\Sigma \to \Theta\boldsymbol{,}\Delta)\rangle$,

(R14) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle A\boldsymbol{,}\Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}B,\ \ \Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}(A \supset B)\rangle$,

(R 15.α) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}D,\ \ (\neg D)\boldsymbol{,}\Gamma \to \Theta\rangle$, где D есть формула, которая не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$,

(R16.β) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle E\boldsymbol{,}\Gamma \to \Theta,\ \ \Gamma \to \Theta\boldsymbol{,}(\neg E)\rangle$, где E есть формула, которая не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \beta$.

(R17) есть секвенциальное правило, каждое применение которого имеет вид $\langle \Gamma \to \Delta\boldsymbol{,}A,\ \ A\boldsymbol{,}\Sigma \to \Theta,\ \ \Gamma\boldsymbol{,}\Sigma \to \Delta\boldsymbol{,}\Theta\rangle$.

Согласно традиции, идущей от [2], секвенциальное правило (R17) принято называть сечением или правилом сечения.

Доказательства в $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ строятся обычным для секвенциальных исчислений образом — аналогично тому, как строятся в [2] LK-выводы, а также аналогично тому, как строятся в [3] и в [14] древовидные доказательства в секвенциальных исчислениях. Определение секвенции, доказуемой в $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, стандартно.

С использованием методов, разработанных в [2], доказана следующая теорема 1.

Теорема 1. *Для всякой L-формулы* A*:* $\to$ A *есть секвенция, доказуемая в $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, тогда и только тогда, когда* A $\in I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Определяем напарника исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ как такое секвенциальное исчисление W, что (1) язык исчисления W есть язык исчисления

$GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ (2) множество всех основных секвенций исчисления W есть множество всех основных секвенций исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, (3) множество всех правил исчисления W есть разность множества всех правил исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ и множества $\{(\mathrm{R17})\}$, (4) доказательство в W строится в виде дерева обычным для секвенциальных исчислений образом. Ясно, что существует единственный напарник исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. Напарника исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ обозначаем через FC $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Следующая теорема 2 (теорема об устранимости сечения для исчисления $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$) доказана методом, предложенным и примененным Г. Генценом в [2].

Теорема 2. *Для всякой секвенции S : S доказуема в $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ тогда и только тогда, когда S доказуема в FC $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.*

Теорема 3. *Исчисление FC $GI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ разрешимо.*

Теорема 3 доказана методом редуцированных секвенций, разработанным Г. Генценом в [2].

В свете теорем 1,2 и 3 очевидна следующая теорема 4.

Теорема 4. *$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть разрешимая логика.*

Построим семантику, адекватную логике $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$. Предлагаемая семантика логики $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ является двузначной в том смысле, что в этой семантике верно следующее: для всякой L-формулы A и для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v значение A при v есть либо 1 (истина), либо 0 (ложь).

$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-предоценкой называем отображение множества всех квазиэлементарных L-формул, длина каждой из которых $\leq max(\alpha,\beta)$, в множество $\{0,1\}$.

$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценкой называем такую $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-предоценку v, что выполняются условия:

(1) для всякой такой квазиэлементарной L-формулы Q, что $h(\mathrm{Q}) < max(\alpha,\beta)$, верно следующее: если $h(\mathrm{Q}) \geq \alpha$ и $v(\mathrm{Q}) = 1$, то $v((\neg\mathrm{Q})) = 0$;

(2) для всякой такой квазиэлементарной L-формулы Q , что $h(\mathrm{Q}) < max(\alpha,\beta)$, верно следующее: если $h(\mathrm{Q}) \geq \beta$ и $v(\mathrm{Q}) = 0$, то $v((\neg\mathrm{Q})) = 1$.

Определим $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке.

$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означиванием при $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке v называем такое отображение f множества всех L-формул в множество $\{0,1\}$, что выполняются следующие условия:

(1) для всякой квазиэлементарной L-формулы A, длина которой $\leq max(\alpha,\beta), f(\mathrm{A}) = v(\mathrm{A})$;

(2) для всякой L-формулы A, являющейся квазиэлементарной L-формулой длины $\geq (\alpha, \beta)max$: $f((\neg\mathrm{A})) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\mathrm{A}) = 0$;

(3) для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой: $f((\neg\mathrm{A})) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\mathrm{A}) = 0$;

(4) для всяких L-формул A и B:

$$f((\mathrm{A}\&\ \mathrm{B})) = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } f(\mathrm{A}) = 1 \text{ и } f(\mathrm{B}) = 1,$$

$$f((\mathrm{A}\vee\ \mathrm{B})) = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } f(\mathrm{A}) = 1 \text{ и } f(\mathrm{B}) = 1,$$

$$f((\mathrm{A}\supset\ \mathrm{B})) = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } f(\mathrm{A}) = 0 \text{ и } f(\mathrm{B}) = 1.$$

Можно доказать, что для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v существует единственное $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при v. Условимся для любой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v обозначать $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при v через $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Определим $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимую L-формулу.

Называем A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимой L-формулой, если для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$.

Дадим определение, называемое определением $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следования. Говорим, что A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следует из M (или из M $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следует A), если выполняются три условия: (1) A есть L-формула, (2) M есть множество L-формул, (3) для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v верно, что если $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(\mathrm{B}) = 1$ для всякой L-формулы B из M, то $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$.

Доказана следующая лемма 1.

Лемма 1. *Всякая аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ является $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимой L-формулой.*

Доказательство. Здесь мы не приводим полностью длинное, но простое доказательство леммы 1, ограничиваясь воспроизведением трех самых «сложных» частей этого доказательства, — части, в которой обосновывается $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (I), части, в которой обосновывается $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (XI, α), и части, в которой обосновывается $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (XII, β).

Докажем $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (I).

Иначе говоря, докажем $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$, где A, B и C — L-формулы.

(1) A, B и C — L-формулы (допущение).

(2) v есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка (допущение).

Ясно, что (3) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при v.

(4) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$ есть L-формула (из (1), по определению L-формулы).

(5) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))) = 1$ (из (2), (3) и (4), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(6) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))) = 0$ (допущение).

(7) $(A \supset B)$ и $((B \supset C) \supset (A \supset C))$ являются L-формулами (из (1), по определению L-формулы).

(8) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset B)) = 1$ и $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((B \supset C) \supset (A \supset C))) = 0$ (из (2), (3), (6) и (7), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(9) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset B)) = 1$ (из (8)).

(10) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(B) = 1$ (из (1), (2), (3) и (9), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(11) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((B \supset C) \supset (A \supset C))) = 0$ (из (8)).

(12) $(B \supset C)$ и $(A \supset C)$ являются L-формулами (из (1), по определению L-формулы).

(13) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((B \supset C)) = 1$ и $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset C)) = 0$ (из (2), (3), (11) и (12), по определению$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(14) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((B \supset C)) = 1$ (из (13)).

(15) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(B) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(C) = 1$ (из (1), (2), (3) и (14), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(16) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset C)) =0$ (из (13)).

(17) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$ и $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(C) = 0$ (из (1), (2), (3) и (16), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(18) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$ (из (17)).

Опираясь на утверждение (18), получаем, что

(19) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) \neq 0$.

(20) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(B) = 1$ (из (10) и (19)).

Опираясь на утверждение (20), получаем, что

(21) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(B) \neq 0$.

(22) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(C) = 1$ (из (15) и (21)).

Опираясь на утверждение (22), получаем, что

(23) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(C) \neq 0$.

(24) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(C) = 0$ (из (17)).

Утверждение (24) противоречит утверждению (23). Следовательно, неверно допущение (6).

Таким образом, (25) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))) \neq 0$.

(26) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))) = 1$ (из (5) и (25)).

Снимая допущение (2) и обобщая, получаем, что

(27) для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((A \ \supset \ B) \ \supset \ ((B \ \supset C) \supset \ (A \supset \ C)))) = 1$.

(28) $((A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)))$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула (из (27), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимой L-формулы).

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что

(29) для всяких L-формул A, B и C: ((A ⊃ B) ⊃ ((B ⊃ C) ⊃ (A ⊃ C))) есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула.

Очевидно, что (30) всякая L-формула вида (I) есть ((A ⊃ B) ⊃ ((B ⊃ C) ⊃ (A ⊃ C))) для некоторых L-формул A, B и C.

Опираясь на утверждения (29) и (30), получаем, что всякая L-формула вида (I) есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула.

Итак, доказана $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (I).

Докажем $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (XI, α).

(1) A и D являются L-формулами и D не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$ (допущение).

(2) A есть L-формула (из (1)).

(3) D есть L-формула (из (1)).

(4) D не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \alpha$ (из (1)).

(5) v есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка (допущение).

(6) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при v (из (5), по соглашению об обозначении).

(7) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть отображение множества всех L-формул во множество $\{0, 1\}$ (из (5) и (6), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

Вспомним, что (8) $h(D)$ есть длина L-формулы D.

Опираясь на утверждения (4) и (8), получаем, что

(9) неверно, что D есть квазиэлементарная L-формула и $h(D) < \alpha$.

(10) D есть квазиэлементарной L-формула (допущение).

(11) Неверно, что $h(D) < \alpha$ (из (9) и (10).

Но тогда понятно, что (12) $h(D) \geq \alpha$.

Понятно, что (13) $h(D) < max(\alpha, \beta)$ или $h(D) \geq max(\alpha, \beta)$.

(14) $h(D) < max(\alpha, \beta)$ (допущение).

(15) Если $v(D) = 1$, то $v((\neg D)) = 0$ (из (3), (12) и (14), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки).

В свете утверждения (14) ясно, что

(16) $h(D) \leq max(\alpha, \beta)$.

(17) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = v(D)$ (из (5), (6), (10) и (16), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

Очевидно, что (18) $h((\neg D)) = h(D) + 1$.

Опираясь на утверждения (14) и (18), получаем, что

(19) $h((\neg D)) \leq max(\alpha, \beta)$.

Понятно, что (20) $(\neg D)$ есть квазиэлементарная L-формула.

(21) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) = v((\neg D))$ (из (5), (6), (19) и (20), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(22) Если $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 1$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) = 0$ (из (15), (17) и (21)).

Опираясь на утверждения (3) и (7), получаем, что

(23) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 1$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 0$.

(24) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 0$ (из (22) и (23)).

Используя утверждения (2), (3), (5), (6), (24), определение L-формулы и определение $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке, получаем, что

(25) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

Снимая допущение (14), получаем, что

(26) если $h(D) < max(\alpha, \beta)$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

(27) $h(D) \geq max(\alpha, \beta)$ (допущение).

(28) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 0$ (из (5), (6), (10) и (27), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(29) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) \neq 1$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 0$ (из (28)).

Разумеется, (30) $(\neg D)$ есть L-формула.

Опираясь на утверждения (7) и (30), получаем, что

(31) если $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) \neq 1$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) = 0$.

(32) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg D)) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 0$ (из (29) и (31)).

Используя утверждения (2), (3), (5), (6), (32), определение L-формулы и определение $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке, получаем, что

(33) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

Снимая допущение (27), получаем, что

(34) если $h(D) \geq max(\alpha, \beta)$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

(35) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$ (из (13), (26) и (34)).

Снимая допущение (10), получаем, что

(36) если D есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

(37) D не есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(38) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\supset D)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(D) = 0$ (из (5), (6), (10) и (37), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

Здесь не приводим шаги (39), (40), (41), (42), аналогичные шагам (29), (30), (31), (32), соответственно.

Используя утверждения (2), (3), (5), (6), (42), определение L-формулы и определение $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке, получаем, что

(43) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

Снимая допущение (37), получаем, что

(44) если D не есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

(45) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$ (из (36) и (44)).

Снимая допущение (5) и обобщая, получаем, что

(46) для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((\neg D) \supset (D \supset A))) = 1$.

(47) $((\neg D) \supset (D \supset A))$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула (из (46), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимой L-формулы).

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что

(48) для всякой L-формулы A и для всякой такой L-формулы D, что D не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$: $((\neg \mathrm{D}) \supset (\mathrm{D} \supset \mathrm{A}))$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула.

Очевидно, что (49) всякая L-формула вида (XI, α) есть $((\neg \mathrm{D}) \supset (\mathrm{D} \supset \mathrm{A}))$ для некоторой L-формулы A и для некоторой такой L-формулы D, что D не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$.

Опираясь на утверждения (48) и (49), получаем, что всякая L-формула вида (XI, α) есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула.

Итак, доказана $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (XI, α).

Докажем $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (XII, β).

(1) A и E являются L-формулами и E не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \beta$ (допущение).

(2) A есть L-формула (из (1)).

(3) E есть L-формула (из (1)).

(4) E не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \beta$ (из (1)).

(5) v есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка (допущение).

(6) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при v (из (5), по соглашению об обозначении).

(7) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть отображение множества всех L-формул во множество $\{0, 1\}$ (из (5) и (6), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

Вспомним, что (8) $h(E)$ есть длина L-формулы E.

Опираясь на утверждения (4) и (8), легко показать, что

(9) E не есть квазиэлементарная L-формула или $h(E) \geq \beta$.

(10) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg(A \supset A))) \neq 1$.

Докажем утверждение (10).

Очевидно, что (10.1) $(A \supset A)$ есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой.

(10.2) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg(A \supset A))) = 1$ тогда только тогда, когда $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset A)) = 0$ (из (5), (6) и (10.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(10.3) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset A)) = 1$ тогда только тогда, когда $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$ (из (2), (5) и (6), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

В свете утверждений (2) и (7) ясно, что

(10.4) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$.

(10.5) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset A)) = 1$ (из (10.3) и (10.4)).

Опираясь на утверждение (10.5), получаем, что

(10.6) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((A \supset A)) \neq 0$.

(10.7) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg(A \supset A))) \neq 1$ (из (10.2) и (10.6)).

Утверждение (10) доказано.

Разумеется, (11) $(\neg(A \supset A))$ есть L-формула.

В свете утверждений (7) и (11) ясно, что

(12) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg(A \supset A))) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg(A \supset A))) = 1$.

(13) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg(A \supset A))) = 0$ (из (10) и (12)).

В свете утверждений (3) и (7) ясно, что

(14) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 1$.

(15) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 1$ (допущение).

Используя утверждения (2), (3), (5), (6), (13), (15) и определение $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке, получаем, что

(16) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((E \supset (\neg(A \supset A)))) = 0$.

(17) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((E \supset (\neg(A \supset A)))) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из(16)).

Разумеется, (18) $(E \supset (\neg(A \supset A)))$ и $(\neg E)$ являются L-формулами.

(19) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))) = 1$ (из (5), (6), (17) и (18), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

Снимая допущение (15), получаем, что

(20) если $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 1$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))) = 1$.

(21) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 1$ (допущение).

(22) E есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(23) $h(E) \geq \beta$ (из (9) и (22)).

(24) $h(E) < max(\alpha, \beta)$ (допущение).

(25) Если $v(E) = 0$, то $v((\neg E)) = 1$ (из (5), (22), (23) и (24), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки).

В свете допущения (24) ясно, что верны утверждения (26) и (27)

(26) $h(E) \leq max(\alpha, \beta)$.

(27) $h((\neg E)) \leq max(\alpha, \beta)$.

Разумеется, (28) $(\neg E)$ есть квазиэлементарная L-формула.

(29) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = v(E)$ (из (5), (6), (22) и (26), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(30) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = v((\neg E))$ (из (5), (6), (27) и (28), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(31) $v(E) = 0$ (из (21) и (29)).

(32) $v((\neg E)) = 1$ (из (25) и (31)).

(33) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из (30) и (32)).

Снимая допущение (24), получаем, что

(34) если $h(E) < max(\alpha, \beta)$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$.

(35) $h(E) \geq max(\alpha, \beta)$ (допущение).

(36) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ тогда только тогда, когда $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 0$ (из (5), (6), (22) и (35), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(37) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из (21) и (36)).

Снимая допущение (35), получаем, что

(38) если $h(E) \geq max(\alpha, \beta)$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$.

Известно, что (39) $h(E) < max(\alpha, \beta)$ или $h(E) \geq max(\alpha, \beta)$.

(40) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из (34), (38) и (39)).

Снимая допущение (22), получаем, что

(41) если E есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$.

(42) E не есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(43) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ тогда только тогда, когда $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 0$ (из (3), (5), (6) и (42), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(44) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из (21)).

Снимая допущение (42), получаем, что

(45) если E не есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$.

(46) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из (41) и (45)).

(47) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((E \supset (\neg(A \supset A)))) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg E)) = 1$ (из(16)) (из (46)).

Разумеется, (48) $(E \supset (\neg(A \supset A)))$ и $(\neg E)$ являются L-формулами.

(49) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))) = 1$ (из (5), (6), (47) и (48), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

Снимая допущение (21), получаем, что

(50) если $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 0$, то $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))) = 1$.

В свете утверждений (3) и (7) ясно, что

(51) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 0$ или $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(E) = 1$.

(52) $\Phi_v^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))) = 1$ (из (20), (50) и (51)).

Снимая допущение (5) и обобщая, получаем, что

(53) для всякой $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))) = 1$.

(54) $((E \supset (\neg(A \supset A))) \supset (\neg E))$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула (из (53), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимой L-формулы).

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что

(55) для всякой L-формулы A и для всякой такой L-формулы E, что E не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \beta$: $((\mathrm{E} \supset (\neg(\mathrm{A} \supset \mathrm{A}))) \supset (\neg\mathrm{E}))$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула.

Очевидно, что (56) всякая L-формула вида (XII, β) есть $((\mathrm{E} \supset (\neg(\mathrm{A} \supset \mathrm{A})))\supset (\neg\mathrm{E}))$ для некоторой L-формулы A и для некоторой такой L-формулы E, что E не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \alpha$.

Опираясь на утверждения (55) и (56), получаем, что всякая L-формула вида (XII, β) есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула.

Итак, доказана $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимость всякой L-формулы вида (XII, β). □

Лемма 2. *Для всякого множества* M L*-формул и для всякой аксиомы* A *исчисления* $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ *верно, что* A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-следует из* M.

Лемма 2 является простым следствием леммы 1 и определений.

Лемма 3. *Для всякого множества* M L*-формул и для всяких* L*-формул* A *и* B*: если* A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-следуют из* M *и* (A $\supset$ B) $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-следует из* M*, то* B $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-следует из* M.

Стереотипное доказательство леммы 3 здесь не приводим.

Опираясь на леммы 2 и 3, нетрудно провести индуктивное доказательство следующей теоремы 5.

Теорема 5. *Для всякого множества* M L*-формул и для всякой* L*-формулы* A*: если* M $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ A*, то* A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-следует из* M.

Теперь нашей целью является доказательство обращения теоремы 5.

Определим $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество.

$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочным множеством называем множество S L-формул, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если $h(\mathrm{Q}) \geq \alpha$ и $\mathrm{Q} \in S$, то неверно, что $(\neg\mathrm{Q}) \notin S$,

(2) для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если $h(\mathrm{Q}) \geq \beta$ и неверно, что $\mathrm{Q} \notin S$, то $(\neg\mathrm{Q}) \in S$,

(3) для всяких L-формул A и B: $(\mathrm{A}\ \&\ \mathrm{B}) \in S$ и тогда только тогда, когда $\mathrm{A} \in S$ и $\mathrm{B} \in S$,

(4) для всяких L-формул A и B: $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \in S$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \in S$ или $\mathrm{B} \in S$,

(5) для всяких L-формул A и B: $(\mathrm{A} \supset \mathrm{B}) \in S$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \notin S$ или $\mathrm{B} \in S$,

(6) для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой: $(\neg\mathrm{A}) \in S$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \in S$.

Лемма 4. *Для всякого* $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-оценочного множества* M *и для всякой квазиэлементарной* L*-формулы* Q*: если* $h(\mathrm{Q}) \geq max(\alpha,\beta)$*, то* $(\neg\mathrm{Q}) \in$ M *тогда только тогда, когда* $\mathrm{Q} \notin$ M.

Доказательство.

(1) M есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество (допущение).

(2) Q есть квазиэлементарная L-формула Q (допущение).

(3) $h(Q) \geq max(\alpha,\beta)$ (допущение).

Опираясь на утверждение (3), получаем,что

(4) $h(Q) \geq \alpha$.

(5) Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если h(Q) $\geq \alpha$ и Q $\in M$, то ($\neg$Q) $\notin M$ (из (1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(6) Если $Q \in M$, то $(\neg Q) \notin M$ (из (2), (4) и (5)).

(7) Если $(\neg Q) \in M$, то $Q \notin M$ (из (6)).

Опираясь на утверждение (3), получаем, что

(8) h(Q) $\geq \beta$.

(9) Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если h(Q) $\geq \beta$ и Q $\notin M$, то ($\neg$Q) $\in M$(из (1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(10) Если Q $\notin M$, то ($\neg$Q) $\in M$ (из (2), (8) и (9)).

(11) $(\neg Q) \in M$ тогда и только тогда, когда $Q \notin M$ (из (7) и (10)).

Снимая допущения (1), (2) и (3), получаем, что для всякого $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества M и для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если h(Q)$\geq max(\alpha, \beta)$, то ($\neg$Q) $\in$ M тогда только тогда, когда Q $\notin$ M.

Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Для всякого множества* M *L-формул и для всякой L-формулы* F*: если неверно, что* M $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ F*, то существует такое $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество* K*,что* M $\subseteq$ K *и при этом неверно, что* K $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ F.

Доказательство.

(1) M есть множество L-формул (допущение).

(2) F есть L-формула (допущение).

(3) Неверно, что $M \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$ (допущение).

Условимся, что (4) U есть множество всех таких множеств X L-формул, что $M \subseteq$ X и неверно, что X $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$. Условимся также, что (5) $\subseteq_U$ есть множество всех таких упорядоченных пар ⟨a, b⟩, что a $\in U$, b $\in B$ и a $\subseteq$ b.

Очевидно, что (6) $\subseteq_U$ есть отношение частичного порядка на U. Поскольку $M \in U$, то (7) $U \neq \varnothing$.Но тогда понятно, что (8) упорядоченная пара $\langle U, \subseteq_U\rangle$ есть частично упорядоченное множество.

(9) Для всякой цепи в $\langle U, \subseteq_U\rangle$ существует верхняя грань в $\langle U, \subseteq_U\rangle$.

Докажем утверждение (9).

(9.1) Z есть цепь в $\langle U, \subseteq_U\rangle$ (допущение)

Ясно, что (9.2) $M \subseteq \Sigma(Z)$ и $\Sigma(Z)$ есть множество L-формул. Здесь $\Sigma(Z)$ есть объединение цепи Z, то есть $\Sigma(Z)$ равно множеству всех таких x, что x$\in$z для некоторого z из Z.

(9.3) $\Sigma(Z) \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$ (допущение).

Тогда (9.4) существует такое целое положительное число n и существуют такие L-формулы $\mathrm{A}_1,\ldots,\ \mathrm{A}_n$, что A_n есть F и для всякого целого положительного числа i, которое меньше или равно n, выполняется хотя бы одно из следующих трех условий: (1) $\mathrm{A}_i \in \Sigma(Z)$, (2) A_i есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, (3) существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle \mathrm{A}_k, \mathrm{A}_l, \mathrm{A}_i\rangle \in\ \mathrm{MP}_L$.

Пусть (9.5) n' есть целое положительное число, $\mathrm{A}'_1,\ldots,\ \mathrm{A}'_{n'}$ — L-формулы, $\mathrm{A}'_{n'}$ есть F и для всякого целого положительного числа i, которое меньше или равно n', выполняется хотя бы одно из следующих трех условий: (1) $\mathrm{A}_i \in \Sigma(Z)$, (2) A_i есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, (3) существуют такие целые положительные числа k и l, каждое из которых меньше i, что $\langle \mathrm{A}_k, \mathrm{A}_l, \mathrm{A}_i\rangle \in \mathrm{MP}_L$.

Легко проверить, что

(9.6) n'-членная последовательность L-формул, первый член которой есть $\mathrm{A}'_1,\ldots,n'$-ый член которой есть $\mathrm{A}'_{n'}$, является $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводом из $\Sigma(Z) \cap \{\mathrm{A}'_1,\ldots,\ \mathrm{A}'_{n'}\}$ L-формулы F.

Очевидно, что

(9.7) $\Sigma(Z) \cap \{\mathrm{A}'_1,\ldots,\ \mathrm{A}'_{n'}\}$ есть конечное подмножество множества $\Sigma(Z)$.

Мы не приводим здесь простое индуктивное (методом прямой индукции) доказательство следующего утверждения (9.8).

(9.8) Существует такое множество H из Z, что $\Sigma(Z) \cap \{\mathrm{A}'_1,\ldots,\mathrm{A}'_{n'}\} \subseteq\ H$.

Пусть (9.9) $H \in Z$ и $\Sigma(Z) \cap \{\mathrm{A}'_1,\ldots,\ \mathrm{A}'_{n'}\} \subseteq H$.

Опираясь на утверждения (9.6) и (9.9) и определения 3 и 4, получаем, что

(9.10) n'-членная последовательность L-формул, первый член которой есть $\mathrm{A}'_1,\ldots,n'$-ый член которой есть $\mathrm{A}'_{n'}$, является $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводом из H L-формулы F. Понятно, что существует n'-членная последовательность L-формул, первый член которой есть $\mathrm{A}'_1,\ldots,\ n'$-ый член которой есть $\mathrm{A}'_{n'}$. В свете этого обстоятельства и утверждения (9.10) ясно, что

(9.11) существует $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-вывод из H L-формулы F.

Но тогда (9.12) $H \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Разумеется, (9.13) $H \in U$.

(9.14) Неверно, что $H \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$ (из (4) и(9.13)).

Утверждение (9.14) противоречит утверждению (9.12).

Следовательно, неверно утверждение (9.3).

Итак, (9.15) неверно,что $\Sigma(Z) \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

(9.16) $\Sigma(Z) \in U$(из (9.2) и (9.15)).

Очевидно, что (9.17) для всякого z из Z верно, что z включается в $\Sigma(Z)$.

(9.18) $z \in Z$ (допущение).

(9.19) z включается в $\Sigma(Z)$ (из (9.17) и (9.18)).

(9.20) $z \subseteq_U \Sigma(Z)$ (из (5), (9.16), (9.18) и (9.19)).

Снимая допущение (9.18) и обобщая, получаем, что

(9.21) для всякого если z $\in Z$, то z $\subseteq_U \Sigma(Z)$.

Опираясь на утверждения (8), (9.1), (9.16) и (9.21) и применяя определение цепи в частично упорядоченном множестве и определение верхней грани множества в частично упорядоченном множестве, получаем, что

(9.22) $\Sigma(Z)$ есть верхняя грань цепи Z в $\langle U, \subseteq_U \rangle$.

(9.23) Существует верхняя грань цепи Z в $\langle U, \subseteq_U \rangle$ (из (9.22)).

Снимая допущение (9.1) и обобщая, получаем, что для всякой цепи в $\langle U, \subseteq_U \rangle$ существует верхняя грань в $\langle U, \subseteq_U \rangle$.

Утверждение (9) доказано.

Вспомним теперь лемму Цорна, которая гласит, что если для всякой цепи в частично упорядоченном множестве Ч существует верхняя грань в Ч, то в Ч существует максимальный элемент.

Из утверждений (8) и (9) получаем по лемме Цорна, что (10) в $\langle U, \subseteq_U \rangle$ существует максимальный элемент.

Пусть (11) $\boldsymbol{M}$ есть максимальный элемент в $\langle U, \subseteq_U \rangle$.

Ясно, что (12) неверно, что $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle \alpha, \beta \rangle}} F$.

(13) Для всякой L-формулы A: если A $\notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle \alpha, \beta \rangle}}$ (A $\supset F$).

Докажем утверждение (13).

(13.1) A есть L-формула (допущение).

(13.2) $A \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

(13.3) Неверно, что $\boldsymbol{M} \cup A \vdash_{HI_{\langle \alpha, \beta \rangle}} F$ (допущение).

В свете допущения (13.2) ясно, что (13.4) $\boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{M} \cup \{A\}$.

Разумеется, что (13.5) $\boldsymbol{M} \in U$. Поскольку $\boldsymbol{M} \in U$, то (13.6) M $\subseteq \boldsymbol{M}$.

Но тогда (13.7) M $\subseteq \boldsymbol{M} \cup \{A\}$.

Подчеркиваем, что (13.8) $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{M} \cup \{A\}$.

(13.9) $\boldsymbol{M} \cup \{A\} \in U$ (из (4), (13.3), (13.7) и того, что $\boldsymbol{M} \cup \{A\}$ является множеством L-формул).

(13.10) $\boldsymbol{M} \subseteq_U \boldsymbol{M} \cup \{A\}$ (из (5), (13.5), (13.8) и (13.9)).

(13.11) $\boldsymbol{M}$ не является максимальным элементом в частично упорядоченном множестве $\langle U, \subseteq_U \rangle$ (из (13.4), (13.9) и (13.10), по определению максимального элемента в частично упорядоченном множестве).

Утверждение (13.11) противоречит утверждению (11).

Следовательно, неверно допущение (13.3).

Но тогда (13.12) $\boldsymbol{M} \cup \{A\} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Разумеется, что (13.13) $\boldsymbol{M}$ есть множество L-формул, а A и F являются L-формулами.

(13.14) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$ (из (13.12) и (13.13), по теореме дедукции для $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводов).

Снимая допущения (13.1) и (13.2) и обобщая, получаем, что для всякой L-формулы A: если A $\notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ (A $\supset F$).

Утверждение (13) доказано.

(14) Для всякой L-формулы A: если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ A, то A $\in \boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (14).

(14.1) A есть L-формула (допущение).

(14.2) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ (допущение).

(14.3) $A \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

(14.4) Если $A \notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$ (из (12) и (14.1)).

(14.5) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$ (из (14.3) и (14.4)).

Опираясь на утверждения (14.2) и (14.5), легко доказать, что

(14.6) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Утверждение (14.6) противоречит утверждению (12).

Следовательно, неверно допущение (14.3).

Но тогда (14.7) $A \in \boldsymbol{M}$.

Снимая допущения (14.1) и (14.2) и обобщая, получаем, что для всякой L-формулы A:

если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ A, то A $\in \boldsymbol{M}$.

Утверждение (14) доказано.

(15) Для всяких L-формул A и B: (A&B) $\in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\in \boldsymbol{M}$ и B $\in \boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (15).

(15.1) A и B являются L-формулами (допущение).

Очевидно, что (15.2) если $(A\&B) \in \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A\&B)$.

Опираясь на то, что $(A\&B) \supset A$ и $(A\&B) \supset B$ являются аксиомами исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, можно доказать, что (15.3) если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A\&B)$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ и $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$.

(15.5) Если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$, то $A \in \boldsymbol{M}$ (из (13) и (15.1)).

(15.6) Если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$, то $B \in \boldsymbol{M}$ (из (13) и (15.1)).

(15.7) Если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ и $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$, то $A \in \boldsymbol{M}$ и $B \in \boldsymbol{M}$ (из (15.5) и (15.6)).

(15.8) Если $(A\&B) \in \boldsymbol{M}$, то $A \in \boldsymbol{M}$ и $B \in \boldsymbol{M}$ (из (15.2), (15.3) и (15.7)).

Очевидно, что (15.9) если $A \in \boldsymbol{M}$ и $B \in \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ и $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$.

Опираясь на то, что $(A \supset (B \supset (A\&B))$ является аксиомой исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, легко доказать, что (15.10) если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ и $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A\&B)$.

Поскольку $(A\&B)$ есть L-формула, то в силу утверждения (14) верно, что

(15.12) если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A\&B)$, то $(A\&B) \in \boldsymbol{M}$.

(15.13) Если $A \in \boldsymbol{M}$ и $B \in \boldsymbol{M}$, то $(A\&B) \in \boldsymbol{M}$ (из (15.9), (15.10) и (15.11)).

(15.14) $(A\&B) \in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда $A \in \boldsymbol{M}$ и $B \in \boldsymbol{M}$ (из (15.8) и (15.13)).

Снимая допущение (15.1) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул A и B верно следующее: (A&B) $\in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\in \boldsymbol{M}$ и B $\in \boldsymbol{M}$.

Утверждение (15) доказано.

(16) Для всяких L-формул A и B :(A$\vee$B) $\in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\in \boldsymbol{M}$ или B $\in \boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (16).

(16.1) A и B являются L-формулами (допущение).

(16.2) $(A \vee B) \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

(16.3) A $\notin \boldsymbol{M}$ и B $\notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

В свете утверждения (16.2) ясно, что (16.4) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \vee B)$.

(16.5) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$ и $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (B \supset F)$ (из (13), (16.1) и (16.3)).

Заметим, что (16.6) $((A \supset F) \supset ((B \supset F) \supset ((A \vee B) \supset F)))$ есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Опираясь на утверждения (16.4), (16.5) и (16.6), легко доказать, что (16.7) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Утверждение (16.7) противоречит утверждению (12).

Следовательно, неверно допущение (16.3).

Но тогда (16.8) $A \in \boldsymbol{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$.

Снимая допущение (16.2), получаем, что

(16.9) если $A \vee B \in$ M, то $A \in \boldsymbol{M}$ или $B \supset \boldsymbol{M}$.

Очевидно, что (16.10) если $A \in \boldsymbol{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ или $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$.

Опираясь на то, что аксиомами исчисления $HPar$ являются $(A \supset (A \vee B))$ и $(B \supset (A \vee B))$, легко доказать, что (16.11) если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ или $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \vee B)$.

Поскольку $(A \vee B)$ есть L-формула, то в силу утверждения (14) верно, что

(16.12) если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \vee B)$, то $(A \vee B) \in \boldsymbol{M}$.

(16.13) Если $A \in \boldsymbol{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$, то $(A \vee B) \in \boldsymbol{M}$ (из (16.10), (16.11) и (16.12)).

(16.14) $(A \vee B) \in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда $A \in \boldsymbol{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$ (из (16.9) и (16.13)).

Снимая допущение (16.1) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул A и B верно следующее: (A$\vee$ B) $\in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\in \boldsymbol{M}$ или B $\in \boldsymbol{M}$.

Утверждение (16) доказано.

(17) Для всяких L-формул A и B: (A $\supset$ B) $\in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\notin \boldsymbol{M}$ или B $\in \boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (17).

(17.1) A и B являются L-формулами (допущение).

(17.2) $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

(17.3) $A \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

В свете допущений (17.1) и (17.3) ясно, что верны следующие утверждения (17.4) и (17.5)

(17.4) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset B)$.

(17.5) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$.

Опираясь на утверждения (17.4) и (17.5), легко доказать что

(17.6) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$.

(17.7) Если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$, то $B \in \boldsymbol{M}$ (из (14) и (17.1)).

(17.8) $B \in \boldsymbol{M}$ (из (17.6) и (17.7)).

Снимая допущение (17.3), получаем, что

(17.9) если $A \in \boldsymbol{M}$, то $B \in \boldsymbol{M}$.

(17.10) $A \notin \boldsymbol{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$ (из (17.9)). Снимая допущение (17.2), получаем, что

(17.11) если $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$, то $A \notin \boldsymbol{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$.

(17.12) $A \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

(17.13) $(A \supset B) \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

Поскольку $(A \supset B)$ есть L-формула, то в силу утверждения (14) верно, что

(17.14) если $(A \supset B) \notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} ((A \supset B) \supset F)$.

(17.15) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} ((A \supset B) \supset F)$ (из (17.13) и (17.14)).

Можно доказать, что для всяких L-формул A, B и C $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ (((A $\supset$ B) $\supset$ C) $\supset$ ((A $\supset$ C) $\supset$ C)).

В частности, верно, что (17.16) $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (((A \supset B) \supset F) \supset ((A \supset F) \supset F))$.

Опираясь на утверждения (17.15) и (17.16), легко доказать, что

(17.17) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} ((A \supset F) \supset F)$.

(17.18) Неверно, что $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ (допущение).

В свете утверждения (17.18) ясно, что (17.19) $A \notin \boldsymbol{M}$.

(17.20) Если $A \notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$ (из (13) и (17.1)).

(17.21) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$ (из (17.19) и (17.20)).

Опираясь на утверждение (17.17) и (17.21), легко доказать, что (17.22) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Утверждение (17.22) противоречит утверждению (12).

Следовательно, неверно допущение (17.18).

Но тогда (17.23) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$.

(17.24) Если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$, то $A \in \boldsymbol{M}$ (из (14) и (17.1)).

(17.25) $A \in \boldsymbol{M}$ (из (17.23) и (17.24)).

Утверждение (17.25) противоречит утверждению (17.12).

Следовательно, неверно допущение (17.13).

Но тогда (17.26) $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$.

Снимая допущение (17.12), получаем, что (17.27) если $A \notin \boldsymbol{M}$, то $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$.

(17.28) $B \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

В свете утверждения (17.28) ясно, что (17.29) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$.

Опираясь на то, что $(B \supset (A \supset B))$ является аксиомой исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, легко доказать, что

(17.30) если $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} B$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset B)$.

(17.31)$\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset B)$ (из (17.29) и (17.30)). Поскольку $(A \supset B)$ есть L-формула, то в силу утверждения (14) верно, что

(17.32) если$\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset B)$, то $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$.

(17.33) $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$ (из (17.31) и (17.32)).

Снимая допущение (17.28), получаем, что

(17.34) если $B \in \boldsymbol{M}$, то $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$.

(17.35) Если $A \notin \mathbf{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$, то $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$ (и (17.27) и (17.34)).

(17.36) $(A \supset B) \in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда $A \notin \mathbf{M}$ или $B \in \boldsymbol{M}$ (из (17.11) и (17.35)).

Снимая допущение (17.1) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул A и B верно следующее: (A $\supset$ B) $\in$ $\boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\notin$ **M** или B $\in$ $\boldsymbol{M}$.

Утверждение (17) доказано.

(18) Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если h(Q) $\geq \alpha$ и Q $\in$ $\boldsymbol{M}$, то ($\neg$Q) $\notin$ $\boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (18).

(18.1) Q есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(18.2) $h(Q) \geq \alpha$ и $Q \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

(18.3) $(\neg Q) \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

(18.4) $Q \in \boldsymbol{M}$ (из (18.2)).

В свете утверждений (18.2) и (18.4) очевидны утверждения (18.5) и (18.6).

(18.5) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (\neg Q)$.

(18.6) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} Q$.

(18.7) $h(Q) \geq \alpha$ (из (18.2)).

Используя утверждение (18.7), получаем, что

(18.8) неверно, что $h(Q) < \alpha$.

(18.9) Неверно, что Q есть квазиэлементарная L-формула и $h(Q) < \alpha$ (из (18.8)).

(18.10) Q не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \alpha$ (из (18.9)).

Разумеется, (18.11) $Q, F, ((\neg Q) \supset (Q \supset F))$ являются L-формулами.

Опираясь на утверждения (18.10), (18.11) и описание множества всех аксиом исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, получаем , что

(18.12) $((\neg Q) \supset (Q \supset F))$ есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Используя утверждения (18.5), (18.6) и (18.12), легко показать что

(18.13) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Снимая допущение (18.3), получаем, что

(18.14) если $(\neg Q) \in \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

(18.15) Неверно, что $(\neg Q) \in \boldsymbol{M}$ (из (12) и (18.14)).

Снимая допущение (18.1) и (18.2) и обобщая, получаем, что для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если h(Q) $\geq \alpha$ и Q $\in$ $\boldsymbol{M}$, то ($\neg$Q) $\notin$ $\boldsymbol{M}$.

Утверждение (18) доказано.

(19) Для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: если h(Q) $\geq \beta$ и Q $\notin$ $\boldsymbol{M}$, то ($\neg$Q) $\in$ $\boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (19).

(19.1) Q есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(19.2) $h(Q) \geq \beta$ и $Q \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

(19.3) $(\neg Q) \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

(19.4) $Q \notin \boldsymbol{M}$ (из (19,2)).

Разумеется, (19.5) Q и $(\neg Q)$ являются L-формулами.

В свете утверждений (13), (19.3), (19.4) и (19.5) очевидны утверждения (19.6) и (19.7).

(19.6) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} ((\neg Q) \supset F)$.

(19.7) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (Q \supset F)$.

(19.8) $h(Q) \geq \beta$ (из (19.2)).

Используя утверждение (19.8), получаем,что (19.9) неверно, что $h(Q) < \beta$.

(19.10) Неверно,что Q есть квазиэлементарная L-формула и $h(Q) \geq \beta$ (из (19.9)).

(19.11) Q не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \beta$ (из (18.10)).

Можно доказать ,что

(19.12) для всякой L-формулы A: если A не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \beta$, то $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ (A$\vee$($\neg$A)).

(19.13) Если Q не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \beta$, то $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (Q \vee (\neg Q))$ (из (19.5) и (19.12)).

(19.14) $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (Q \vee (\neg Q))$ (из (19.11) и (19.13)).

Очевидно, что (19.15) $((Q \supset F) \supset (((\neg Q) \supset F) \supset ((Q \vee (\neg Q)) \supset F)))$ есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Опираясь на утверждения (19.6), (19.7), (19.13) и (19.15), легко показать ,что

(19.16) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Снимая допущение (19.3), получаем, что

(19.17) если $(\neg Q) \notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

(19.18) ($\neg$Q) $\in \boldsymbol{M}$ (из (2) и (19.17)).

Снимая допущения (19.1) и (19.2) и обобщая, получаем, что для всякой квазиэлементарной L-формулы Q: h(Q) $\geq \beta$ и Q $\notin \boldsymbol{M}$, то ($\neg$Q) $\in \boldsymbol{M}$.

Утверждение (19) доказано.

(20) Для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой: ($\neg$A) $\in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\notin \boldsymbol{M}$.

Докажем утверждение (20).

(20.1) A есть L-формула, не являющаяся квазиэлементарной L-формулой (допущение).

(20.2) $(\neg A) \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

(20.3) $A \in \boldsymbol{M}$ (допущение).

В свете утверждений (20.2) и (20.3) очевидны утверждения (20.4) и (20.5).

(20.4) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (\neg A)$.

(20.5) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$.

(20.6) A не есть квазиэлементарная L-формула длины $< \beta$ (из (20.1)).

Разумеется, (20.7) A, F и $((\neg A) \supset (A \supset F))$ являются L-формулами.

Опираясь на утверждения (20.6), (20.7)) и описание множества всех аксиом исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$, получаем,что

(20.8) $((\neg A) \supset (A \supset F))$ есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Используя утверждения (20.4), (20.5) и ((20.8), легко показать,что

(20.9) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Снимая допущения (20.3), получаем, что

(20.10) если $A \in \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

(20.11) $(\neg A) \in \boldsymbol{M}$ (из (12) и (20.10)).

Снимая допущения (20.2), получаем, что

(20.12) если $(\neg A) \in \boldsymbol{M}$, то $A \notin \boldsymbol{M}$.

(20.13) $A \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

(20.14) $(\neg A) \notin \boldsymbol{M}$ (допущение).

Разумеется, (20.15) A и (¬A) являются L-формулами.

В свете утверждений (13), (20.13), (20.14) и (20.15) очевидны утверждения (20.16) и (20.17).

(20.16) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} ((\neg A) \supset F))$.

(20.17) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} (A \supset F)$.

Можно доказать, что (20.18) для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой длины $< \beta, \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ (A∨(¬A)).

(20.19) A не является квазиэлементарной L-формулой длины $< \beta$ (из (20.1)).

(20.20) $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ (A ∨(¬A))(из (20.15), (20.18) и (29.19)).

Очевидно, что (20.21) $((A \supset F) \supset (((\neg A) \supset F) \supset ((A \vee (\neg A)) \supset F)))$ есть аксиома исчисления $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Опираясь на утверждения (20.16), (20.17), (20.20) и (20.21), легко показать,что (20.22) $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Снимая допущение (20.14), получаем, что

(20.23) если $(\neg A) \notin \boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

(20.24) $(\neg A) \in \boldsymbol{M}$ (из (12) и (20.23)).

Снимая допущение (20.13), получаем, что

(20.25) если $A \notin \boldsymbol{M}$, то $(\neg A) \in \boldsymbol{M}$.

(20.26) $(\neg A) \in \boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A$\notin$ $\boldsymbol{M}$ (из (20.12) и (20.25)).

Снимая допущения (20.1) и обобщая, получаем, что для всякой L-формулы A, не являющейся квазиэлементарной L-формулой: (¬A) $\in$ $\boldsymbol{M}$ тогда и только тогда, когда A $\notin$ $\boldsymbol{M}$.

Утверждение (20) доказано.

Опираясь на утверждения (15), (16), (17), (18), (19), и (20) и определение $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества, получаем, что $\boldsymbol{M}$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество. Являясь максимальным элементом в частично упорядоченном множестве $\langle U, \subseteq_U\rangle$, $\boldsymbol{M}$ выполняет условие: $M \subseteq \boldsymbol{M}$ и неверно, что $\boldsymbol{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$. Таким образом, доказано, что (22) существует такое $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество K, что $M \subseteq$ K и при этом неверно, что K $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} F$.

Снимая допущения (1) и (2) и обобщая, получаем, что для всякого множества M L-формул и для всякой L-формулы F: если неверно, что M $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ F, то существует такое $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество K,что M $\subseteq$ K и при этом неверно, что K $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ F.

Лемма 5 доказана. □

Лемма 6. *Для всякого $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества* K *существует такая $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка* v, *что для всякой L-формулы* A*:* $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(A) = 1$ *тогда и только тогда, когда* A $\in$ K.

Доказательство.

(1) $\boldsymbol{K}$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество (допущение).

Условимся, что (2) $\mathrm{v}_{\boldsymbol{K}}$ есть множество всех таких упорядоченных пар ⟨x, y⟩, что выполняются следующие условия: (1) x есть квазиэлементарная L-формула длины $\leq$max(α,β), (2) y $\in$ {0,1}, (3) y=1 тогда и только тогда, когда x $\in$ $\boldsymbol{K}$.

Очевидны следующие утверждения (3) и (4).

(3) $v_{\boldsymbol{K}}$ является $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценкой.

(4) $\Phi_{V\boldsymbol{K}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивание при $v_{\boldsymbol{K}}$.

(5) Для всякой L-формулы A: $\Phi_{V\boldsymbol{K}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}$(A) = 1 тогда и только тогда, когда A $\in$ $\boldsymbol{K}$.

Докажем утверждение (5), используя индукцию по построению L-формулы. Для этого достаточно доказать следующие утверждения (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) и (5.5).

(5.1) Для всякой пропозициональной переменной q языка L: $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{q}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{q} \in \boldsymbol{K}$.

(5.2) Для всяких L-формул B и C: если ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K}$) и ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{C}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{C} \in \boldsymbol{K}$), то ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\mathrm{B}\&\mathrm{C})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{B}\&\mathrm{C}) \in \boldsymbol{K}$).

(5.3) Для всяких L-формул B и C: если ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K}$) и ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{C}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{C} \in \boldsymbol{K}$), то ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\mathrm{B}\vee\mathrm{C})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{B}\vee\mathrm{C}) \in \boldsymbol{K}$).

(5.4) Для всяких L-формул B и C: если ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K}$) и $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{C}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{C} \in \boldsymbol{K}$), то ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\mathrm{B}\supset\mathrm{C})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{B}\supset\mathrm{C}) \in \boldsymbol{K}$).

(5.5) Для всякой L-формулы B: если ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K}$), то ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg\mathrm{B})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg\mathrm{B}) \in \boldsymbol{K}$).

Докажем утверждение (5.1).

(5.1.1) q есть пропозициональная переменная языка L (допущение).

Очевидно следующее утверждение (5.1.2).

(5.1.2) q есть квазиэлементарная L-формула, длина которой $\leq \max(\alpha, \beta)$.

(5.1.3) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(q) =_{V\boldsymbol{K}}(q)$ (из (4) и (5.1.2), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.1.4) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$(допущение).

(5.1.5) ${}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$(из 5.1.3) и (5.1.4)).

(5.1.6) $q \in \boldsymbol{K}$ (из (2), (5.1.2) и (5.1.5)).

Снимая допущение (5.1.4), получаем, что

(5.1.7) если $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$, то $q \in \boldsymbol{K}$.

(5.1.8) $q \in \boldsymbol{K}$ (допущение).

(5.1.9) ${}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$(из (2), (5.1.2) и (5.1.8)).

(5.1.10)$\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$ (из (5.1.3) и (5.1.9)).

Снимая допущение (5.1.8), получаем, что

(5.1.11) если $q \in \boldsymbol{K}$, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$.

(5.1.12) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(q) = 1$ тогда и только тогда, когда $q \in \boldsymbol{K}$ (из (5.1.7) и (5.1.11)).

Снимая допущение (5.1.1) и обобщая, получаем, что для всякой пропозициональной переменной q языка L: $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{q}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{q} \in \boldsymbol{K}$.

Утверждение (5.1) доказано.

Докажем утверждение (5.2).

(5.2.1) B и C являются L-формулами (допущение).

(5.2.2) ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ тогда и только тогда, когда $B \in \boldsymbol{K}$) и ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(C) = 1$ тогда и только тогда, когда $C \in \boldsymbol{K}$) (допущение).

(5.2.3) ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B\&C)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ и $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(C) = 1$ (из (3), (4) и (5.2.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.2.4) $(B\&C) \in \boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда $B \in \boldsymbol{K}$ и $C \in \boldsymbol{K}$(из (1) и (5.2.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(5.2.5) ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B\&C)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(B\&C) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.2.2), (5.2.3) и (5.2.4)).

Снимая допущения (5.2.1) и (5.2.2) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул B и C: если ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K}$) и ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{C}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{C} \in \boldsymbol{K}$), то ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\mathrm{B}\&\mathrm{C})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{B}\&\mathrm{C}) \in \boldsymbol{K}$).

Утверждение (5.2) доказано.

Докажем утверждение (5.3).

(5.3.1) B и C являются L-формулами (допущение).

(5.3.2) ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ тогда и только тогда, когда $B \in \boldsymbol{K}$) и ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(C) = 1$ тогда и только тогда, когда $C \in \boldsymbol{K}$) (допущение).

(5.3.3) ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B \vee C)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ или $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(C) = 1$ (из (3), (4) и (5.3.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.3.4) $(B \vee C) \in \boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда $B \in \boldsymbol{K}$ или $C \in \boldsymbol{K}$ (из (1) и (5.3.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(5.3.5) ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B \vee C)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(B \vee C) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.3.2), (5.3.3) и (5.3.4)).

Снимая допущения (5.3.1) и (5.3.2) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул B и C: если ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K}$) и ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{C}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{C} \in \boldsymbol{K}$), то ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\mathrm{B}\vee\mathrm{C})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{B}\vee\mathrm{C}) \in \boldsymbol{K}$).

Утверждение (5.3) доказано.

Докажем утверждение (5.4).

(5.4.1) B и C являются L-формулами (допущение).

(5.4.2) ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathbf{K}$) и ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(C) = 1$ тогда и только тогда, когда $C \in \boldsymbol{K}$) (допущение).

(5.4.3) ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B \supset C)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 0$ или $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(C) = 1$ (из (3), (4) и (5.4.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.4.4) $(B \supset C) \in \boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда $B \notin \boldsymbol{K}$ или $C \in \boldsymbol{K}$ (из (1) и (5.4.1), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(5.4.5) ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B \supset C)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(B \supset C) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.4.2), (5.4.3) и (5.4.4)).

Снимая допущения (5.4.1) и (5.4.2) и обобщая, получаем, что для всяких L-формул B и C: если ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \boldsymbol{K}$) и ($\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(\mathrm{C}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{C} \in \boldsymbol{K}$), то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\mathrm{B}\supset\mathrm{C})) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{B}\supset\mathrm{C}) \in \boldsymbol{K}$).

Утверждение (5.4) доказано.

Докажем утверждение (5.5).

(5.5.1) B есть L-формула (допущение).

(5.5.2) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ тогда и только тогда, когда $B \in \boldsymbol{K}$ (допущение).

Очевидно, что (5.5.3) если $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 0$, то неверно, что $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$.

(5.5.4) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}$ есть отображение в $\{0, 1\}$ (из (3) и (4), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

В свете утверждения (5.5.4) ясно, что

(5.5.5) если неверно, что $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 0$.

(5.5.6) Неверно, что $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 0$ (из (5.5.3) и (5.5.5)).

(5.5.7) B не есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

(5.5.8) ${}^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}\ (B)\ = 0$ (из (3), (4), (5.5.1), (5.5.7), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.5.9) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда неверно, что $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}(B) = 1$ (из (5.5.6) и (5.5.8)).

(5.5.10) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $B \notin \boldsymbol{K}$ (из (5.5.2) и (5.5.9)).

(5.5.11) $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда $B \notin \boldsymbol{K}$ (из (1), (5.5.1) и (5.5.7), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(5.5.12) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.5.10) и (5.5.11)).

Снимая допущение (5.5.7), получаем, что

(5.5.13) если B не есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$.

(5.5.14) B есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

Разумеется, что (5.5.15) $(\neg B)$ есть квазиэлементарная L-формула (допущение).

Ясно, что (5.5.16) $h(B) < max(\alpha, \beta)$ или $h(B) \geq max(\alpha, \beta)$.

(5.5.17) $h(B) < max(\alpha, \beta)$ (допущение).

Тогда очевидно, что (5.5.18) $h((\neg B)) \leq max(\alpha, \beta)$.

(5.5.19)$\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) =_{V\boldsymbol{K}} ((\neg B))$ (из (3), (4), (5.5.15) и (5.5.18), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.5.20) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((B)) = 1$ (допущение).

(5.5.21) ${}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ (из (5.5.19) и (5.5.20)).

(5.5.22) $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (из (2), (5.5.15), (5.5.18) и (5.5.21)).

Снимая допущение (5.5.20), получаем, что

(5.5.23) если $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$, то $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$.

(5.5.24) $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (допущение).

(5.5.25) ${}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$(из (2), (5.5.15), (5.5.18) и (5.5.24)).

(5.5.26) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ (из (5.5.19) и (5.5.25)).

Снимая допущение (5.5.24), получаем, что

(5.5.27) если $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$.

(5.5.28) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.5.23) и (5.5.27)).

Снимая допущение (5.5.17), получаем, что

(5.5.29) если $h(B) < max(\alpha, \beta)$, то $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$.

(5.5.30) $h(B) \geq max(\alpha, \beta)$ (допущение).

(5.5.31) $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}\ (B)\ = 0$ (из (3), (4), (5.5.14) и (5.5.30), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-означивания при заданной $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценке).

(5.5.32)$\Phi^{\langle\alpha,\beta\rangle}_{V\boldsymbol{K}}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $B \notin \boldsymbol{K}$ (из (5.5.2), (5.5.6) и (5.5.31)).

(5.5.33) $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда $B \notin \boldsymbol{K}$ (из (1), (5.5.14) и (5.5.30), по лемме 1).

(5.5.34) $\Phi_{V\boldsymbol{K}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.5.32) и (5.5.33)).

Снимая допущение (5.5.30), получаем, что

(5.5.35) если $h(B) \geq max(\alpha, \beta)$, то $\Phi_{V\boldsymbol{K}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$.

(5.5.36) $\Phi_{V\boldsymbol{K}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.5.16), (5.5.29) и (5.5.35)).

Снимая допущение (5.5.14), получаем, что

(5.5.37) если B есть квазиэлементарная L-формула, то $\Phi_{V\boldsymbol{K}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$.

(5.5.38) $\Phi_{V\boldsymbol{K}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$ (из (5.5.13) и (5.5.37)).

Снимая допущения (5.5.1) и (5.5.2) и обобщая, получаем, что для всякой L-формулы B: если $\Phi_{V\boldsymbol{K}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(\mathrm{B}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{B} \in \mathbf{K}$, то $\Phi_{V\boldsymbol{K}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}((\neg B)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\neg B) \in \boldsymbol{K}$.

Утверждение (5.5) доказано.

Утверждение (5) доказано.

Опираясь на утверждения (3) и (5), получаем, что существует такая $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка v, что для всякой L-формулы A: $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(\mathrm{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \in \mathbf{K}$.

Снимая допущение (1) и обобщая, получаем, что для всякого $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества K существует такая $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка v, что для всякой L-формулы A: $\Phi_{\mathrm{v}}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(\mathrm{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \in \mathrm{K}$.

Лемма 6 доказана. □

Теперь докажем теорему 6 — обращение теоремы 5.

Теорема 6. *Для всякого множества* M *L-формул и для всякой L-формулы* A*: если* A *$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следует из* M*, то* $\mathrm{M} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} \mathrm{A}$.

Доказательство.

(1) M есть множество L-формул (допущение).

(2) A есть L-формула (допущение).

(3) A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следует из M (допущение).

(4) Неверно, что $M \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ (допущение).

(5) Существует такое $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество K, что $M \subseteq \mathrm{K}$ и при этом неверно, что $\mathrm{K} \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ (из (1), (2) и (4), по лемме 5).

Пусть (6) K есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество, $M \subseteq K$ и при этом неверно, что $K \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$.

(7) K есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочное множество (из (6)).

(8) Существует такая $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка v, что для всякой L-формулы A верно следующее: φ_{v}(A)=1 тогда и только тогда, когда A принадлежит множеству K (из (7), по лемме 6).

Пусть (9) w есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка и для всякой L-формулы A верно следующее: φ_w(A)=1 тогда и только тогда, когда A принадлежит множеству K.

(10) $M \subseteq K$ (из (6)).

(11) Для всякой L-формулы A из M верно, что φ_w(A)=1 (из (9) и (10)).

Ясно, что (12) для всякого множества M L-формул и для всякой формулы A из M верно, что A $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-выводима из M.

(13) Неверно, что $K \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$ (из (6)).

(14) K есть множество L-формул (из (7), по определению $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценочного множества).

(15) A не принадлежит множеству K (из (2), (12), (13) и (14)).

(16) Для всякой L-формулы A верно следующее: φ_w(A)=1 тогда и только тогда, когда A принадлежит множеству K (из (9)).

(17) Неверно, что $\varphi_w(A)$=1 (из (2), (15) и (16)).

(18) Для всякой $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценки v верно следующее: если для всякой L-формулы B из M φ_{v}(B)=1, то $\varphi_{\mathrm{v}}(A)$=1 (из (3), по определению $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следования).

(19) w есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-оценка (из (9)).

(20) Если для всякой L-формулы B из K φ_w(B)=1, то $\varphi_w(A)$=1 (из (18) и (19)).

(21) $\varphi_w(A)$=1 (из (11) и (20)).

Утверждение (21) противоречит утверждению (17). Следовательно, неверно допущение (4). Итак, $M \vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}} A$. Завершаем доказательство теоремы 6, снимая допущения (1), (2) и (3) и обобщая. □

В свете теорем 5 и 6 очевидна следующая теорема 7.

Теорема 7. *Для всякого множества* M *L-формул и для всякой L-формулы* A*:* M $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ A *тогда и только тогда, когда* A $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-следует из M.*

Легко убедиться в справедливости следующих утверждений У1 и У2.

У1. Для всякой L-формулы A: $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$A тогда и только тогда, когда существует $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-вывод из пустого множества L-формулы A.

У2. Для всякой L-формулы А: А есть $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-общезначимая L-формула тогда и только тогда, когда А $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-следует из пустого множества.

Используя теорему 7 и утверждения У1 и У2, получаем следующую теорему 8.

Теорема 8. *Для всякой L-формулы* А*:* $\vdash_{HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}}$ А *тогда и только тогда, когда* А *есть* $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-общезначимая L-формула.*

Опираясь на теорему 8 и соглашение об использовании «$I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$», убеждаемся, что верна следующая теорема 9 об адекватности построенной здесь семантики логике $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$.

Теорема 9. *Для всякой L-формулы* А*:* А $\in I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ *тогда и только тогда, когда* А *есть* $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$*-общезначимая L-формула.*

Автор планирует опубликовать продолжение этой статьи, в котором будут даны доказательство табличности любой такой I-логики $I_{\langle x,y\rangle}$ васильевского типа, что $x \neq \omega$ и $y \neq \omega$, и доказательство нетабличности любой такой I-логики $I_{\langle x,y\rangle}$ васильевского типа, что $x = \omega$ или $y = \omega$.

Литература

[1] *Васильев Н.А.* Воображаемая (неаристотелева) логика // *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука. 1989. С. 53–94

[2] *Генцен Г.* Исследование логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9–74.

[3] *Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.* Математическая логика. М., 1979.

[4] *Попов В.М.* Две последовательности простых паранормальных логик // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы IX Общероссийской научной конференции 22–24 июня 2006 г. СПб., 2006. С. 382–385.

[5] *Попов В.М.* Интервалы простых паралогик // Смирновские чтеиия по логике. Материалы 5-й конференции 20–22 июня 2007, Москва, 2007. С. 35–37.

[6] *Попов В.М.* Две последовательности простых паранепротиворечивых логик // Логические исследования. М.: Наука, 2007. Вып. 14. С. 257–261.

[7] *Попов В.М.* Две последовательности простых параполных логик//Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы X-й научной конференции 26–28 июня 2008 г. СПб., 2008. С. 304–306.

[8] *Попов В.М.* Некоторые интервалы между простыми паралогиками // Логические исследования. М.: Наука. Вып. 15. 2009. С. 182–184.

[9] *Попов В.М.* Секвенциальные аксиоматизации простых паралогик // Логические исследования. М.: Наука. Вып. 16. 2010. С. 205–220.

[10] *Попов В.М.* Семантическая характеризация паранепротиворечивых логик $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}\dots$ // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы XI-й научной конференции 2010 г. СПб., 2010. С. 366–368.

[11] *Попов В.М.* Семантическая характеризация параполных логик $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3}\dots$ // Логика, методология, науковедение: актуальные проблемы и перспективы. Сборник докладов и тезисов всероссийской научной конференции. Ростов-на-Дону, Из-во Южного федерального университета. 2010. С. 114–116.

[12] *Попов В.М.* Секвенциальная аксиоматизация логики $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$ // Восьмые смирновские чтения: материалы Международной научной конференции, Москва, 19–21 июня 2013г. М.: Современные тетради, 2013. С. 27–29.

[13] *Попов В.М.* Об одном обобщении теоремы Гливенко // Логические исследования. 2015. Том 21. № 1. С. 100–121.

[14] *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления // Теория логического вывода. М., 1999. С.16–233.

[15] *Arruda A.I.* On the imaginary logic of N.A.Vasil'ev // Proceedings of Fourth Latin-American Symposium on Mathematical Logic. North-Holland, 1979. P. 1–41.

V.M. Popov

Sequent Axiomatization and Semantics of I-logics of Vasiliev's Type

Popov Vladimir Mikhailovich
Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University
Lomonosovsky prospect, 27–4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.
E-mail: pphiloslog@mail.ru

I study here logics of Vasiliev‘s type were found in the process of explication of some of the ideas of the Russian logician and philosopher Nikolai Alexandrovich Vasiliev underlying his "imaginary logic". This article demonstrates how to construct a simple and convenient search for proof of sequent axiomatization of I-logics of Vasiliev‘s type and how to build intuitively clear two-valued semantics, adequate I-logics of Vasiliev‘s type. In the present paper are defined by I-logics of Vasiliev‘s type, built their sequent axiomatization, provides the necessary semantic definitions and prove a theorem about the justification of $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-proofs (theorem 5) and theorem about the completeness of $HI_{\langle\alpha,\beta\rangle}$-proofs (theorem 6). The work concludes with a number of corollaries of these theorems and the announcement of a solution to the problem of existence of finite characteristic matrix for the logics of Vasiliev‘s type.

Keywords: I-logic of Vasiliev's type, sequent axiomatization of I-logics of Vasiliev's type, semantics of I-logics of Vasiliev's type

References

[1] Vasiliev, N.A. "Voobrazhaemaya (nearistoteleva) logika" [Imaginary (aaristotelous) logic], *N.A. Vasil'ev Voobrazhaemaya logika. Izbrannye trudy* [A.Vasiliev Imaginary logic. Selected works]. M.: Nauka. 1989. pp. 53–94. (In Russian)

[2] Gentzen, G. "Issledovanie logicheskikh vyvodov" [The Study of logical inference], *Matematicheskaya teoriya logicheskogo vyvoda* [Mathematical theory of logical inference]. M., 1967. pp. 9–74. (In Russian)

[3] Ershov, Yu.L., Palyutin, E. A. *Matematicheskaya logika* [Mathematical logic]. M., 1979. (In Russian)

[4] Popov, V.M. "Dve posledovatel'nosti prostykh paranormal'nykh logik" [Two sequences of simple paranormal logics], *Sovremennaya logika: problemy teorii, istorii i primeneniya v nauke* [Modern logic: problems of theory, history and application in science]. Materials of IX all-Russian scientific conference, 22–24 June 2006 - St. Petersburg, 2006. pp. 382–385. (In Russian)

[5] Popov, V.M. "Intervaly prostykh paralogik" [Intervals simple paralogic], *Smirnovskie chteiiya po logike* [Smirnov, caiia logically]. Materials of the 5th conference on June 20–22, 2007, Moscow, 2007. pp. 35–37. (In Russian)

[6] Popov, V.M. "Dve posledovatel'nosti prostykh paraneprotivorechivykh logik" [Two sequences of simple paraconsistent logics], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], M.: Nauka. Vol. 14. 2007. pp. 257–261. (In Russian)

[7] Popov, V. M. "Dve posledovatel'nosti prostykh parapolnykh logik" [Two sequence of simple parabolic logic], *Sovremennaya logika: problemy teorii, istorii i primeneniya v nauke* [Modern logic: problems of theory, history and application in science]. Materials of the X-th scientific conference June 26–28, 2008 — St. Petersburg, 2008. pp. 304–306. (In Russian)

[8] Popov, V.M. "Nekotorye intervaly mezhdu prostymi paralogikami" [Some intervals between simple paralogical], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], Mю: Nauka. Vol. 15. 2009. pp. 182–184. (In Russian)

[9] Popov, V.M. "Sekventsial'nye aksiomatizatsii prostykh paralogik" [Sequential axiomatization of simple paralogic], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations], Moscow, Nauka. Vol. 16. 2010. pp. 205–220. (In Russian)

[10] Popov, V.M. "Semanticheskaya kharakterizatsiya paraneprotivorechivykh logik $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3} \ldots$" [Semantical characterization of paraconsistent logics $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3} \ldots$], *Sovremennaya logika: problemy teorii, istorii i primeneniya v nauke* [Modern logic: problems of theory, history and application in science]. Proceedings of XI-th scientific conference 2010 — St. Petersburg, 2010. pp. 366–368. (In Russian)

[11] Popov, V.M. "Semanticheskaya kharakterizatsiya parapolnykh logik $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3} \ldots$" [Semantical characterization of paracomplete logics $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{1,3} \ldots$], *Logika, metodologiya, naukovedenie: aktual'nye problemy i perspektivy* [Logic, methodology, science of science: current problems and prospects]. A collection of reports and abstracts of all-Russian scientific conference. Rostov-on-don: in southern Federal University, 2010. pp. 114–116. (In Russian)

[12] Popov, V.M. "Sekventsial'naya aksiomatizatsiya logiki $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$" [Sequential axiomatization of the logic $I_{\langle\alpha,\beta\rangle}$], *Vos'mye smirnovskie chteniya* [The Eighth Smirnov's readings] materials of International scientific conference, Moscow, 19–21 June 2013. M.: Modern notebooks, 2013.With. 27–29. (In Russian)

[13] Popov, V.M. "Ob odnom obobshchenii teoremy Glivenko" [On a generalization of a theorem of Glivenko] // *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations]. M.: Nauka. Vol. 21(1). 2015. pp. 100–121. (In Russian)

[14] Smirnov, V.A. "Formal'nyi vyvod i logicheskie ischisleniya" [Formal inference and logical calculi], *Teoriya logicheskogo vyvoda* [The Theory of logical inference]. M., 1999. pp. 16–233. (In Russian)

[15] Arruda, A.I. "On the imaginary logic of N. A. Vasiliev", *Proceedings of Fourth Latin-American Symposium on Mathematical Logic.* North-Holland, 1979. pp. 1–41.