Логические исследования
2016. Т. 22. № 1. С. 13–31
УДК 510.643

Logical Investigations
2016, vol. 22, no 1, pp. 13–31

Неклассическая логика
Non-classical Logic

А.С. Карпенко[1], $\boxed{\text{А.В. Чагров}}$

Модальная пропозициональная логика истины Tr и ее полнота

Карпенко Александр Степанович
Сектор логики, Институт философии РАН.
109240, Российская федерация, Москва, ул. Гончарная, 12, строение 1.
E-mail: `as.karpenko@gmail.com`

Чагров Александр Васильевич
Кафедра алгебры и математической логики,
Тверской государственный университет.
170100, Российская федерация, Тверь, ул. Желябова, 33
E-mail: `chagrovy@mail.ru`

В статье рассмотрена четырехзначная модальная логика Собочиньского **V2** (расширение **S5**). Прослежено ее возникновение, описываются интересные свойства и приводятся различные эквивалентные формулировки. Особый интерес представляют ее алгебраические модели: в виде расширения алгебры Де Моргана булевым отрицанием $\neg$ и в виде расширения булевой алгебры эндоморфизмом g, который затем интерпретируется как пропозициональный оператор истинности T. Логика, соответствующая последнему случаю, обозначена посредством **Tr**. Обращается внимание на применение **Tr** в теории истины М. Фиттинга. Приводится аксиоматизация **Tr** в языке $(\rightarrow, \neg, T)$. Доказывается полнота логики **Tr** с помощью применения очень мощной теоремы Салквиста, которая дает достаточное условие полноты по Крипке для нормальных модальных логик. Доказывается также алгебраическая полнота логики **Tr**.

Ключевые слова: модальная логика **V2**, алгебра Де Моргана, булева алгебра, эндомофизмы, логика **Tr**, теория истины Фиттинга, полнота по Крипке, теорема Салквиста, алгебраическая полнота

1. Четырехзначная классическая логика $\mathbf{C_4}$

Пусть $\mathfrak{M}_4^C$ есть четырехзначная логическая матрица

$$\langle\{1, a, b, 0\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \{1\}\rangle,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 14-03-00341.

которая получена посредством прямого произведения матрицы $\mathfrak{M}_2^C$ (для классической пропозициональной логики $\mathbf{C}_2$) саму на себя, т.е. $\mathfrak{M}_4^C = \mathfrak{M}_2^C \times \mathfrak{M}_2^C$, где матричные операции $\neg, \to, \vee, \wedge$ определяются следующим образом:

x	$\neg x$
1	0
a	b
b	a
0	1

$\to$	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	1	1	b	b
b	1	a	1	a
0	1	1	1	1

$\vee$	1	a	b	0
1	1	1	1	1
a	1	a	1	a
b	1	1	b	b
0	1	a	b	0

$\wedge$	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	a	a	0	0
b	b	0	b	0
0	0	0	0	0

Как обычно:

$x \vee y = \neg x \to y,$

$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y),$

$x \to y = \neg x \vee y,$

$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x).$

Хорошо известно, что матрица $\mathfrak{M}_4^C$ является характеристической для $\mathbf{C}_2$. Логику с соответствующими логическими связками обозначим посредством $\mathbf{C}_4$.

2. Модальная логика V2 и ее алгебры

В книге [12] К. Льюис и К. Лэнгфорд определяют и исследуют модальные системы $\mathbf{S}1$–$\mathbf{S}5$, используя главным образом 4-значные матрицы. Обратим внимание на группу истинностных таблиц для связок $\to, \neg$ и $\Box$, которые образуют матрицу «группы III» [12, с. 493], где модальный оператор $\Box$ определяется следующим образом:

$$\Box 1 = 1; \Box a = \Box b = \Box 0 = 0.$$

В [16, с. 305] Б. Собочиньский обнаруживает формулу α:

$$\Box p \vee \Box(p \to q) \vee \Box(p \to \neg q)$$

и устанавливает, что она не выводима в **S5**, а добавление ее к **S5** не превращает всю систему в $\mathbf{C}_2$. Собочиньский замечает, что в силу результата С. Скрогса [15] о предтабличности **S5** система $\mathbf{S5}+\alpha$ является конечнозначной логикой. В [17, с. 350] эта система обозначается посредством **V2**, и это стало её стандартным обозначением. Сам Собочиньский занялся исследованием системы $\mathbf{V1}(\mathbf{S4}+\alpha)$. Нас же как раз интересует система **V2**.

В [5, с. 121] Е. Леммон рассматривает двухэлементные модели Крипке для 15 четырехзначных модальных логик, являющихся расширением $\mathbf{C_4}$. Как раз $\Re_{15}$ является такой моделью для **V2**, где отношение достижимости U определяется следующим образом: $\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$. Также эти модели наглядно представлены с помощью *направленных графов* (с. 122).

В [6] Л.Л. Максимова рассмотрела все нормальные расширения модальной логики **S5** (кроме самой $\mathbf{S5}, \mathbf{C_2}$ и противоречивой логики), которые обладают интерполяционным свойством Крейга. Оказалось, что модальная логика **V2** является *единственным* таким расширением!

В [1] Н.М. Ермолаева и А.А. Мучник рассматривают расширение алгебр Де Моргана[2] операцией булева отрицания $\neg$. Получившиеся алгебры названы "*MB*-алгебрами"[3]. Доказывается полнота аксиоматики *MB*-алгебр и устанавливается топологическое (множественное) представление *MB*-алгебр. Авторы показывают, что «логика *MB*-алгебр... является усилением **S5**, а именно **V2**» [1, с. 190]. Также утверждается, что матрица «группы III» является характеристической для модальной логики **V2**, а сама логика **V2** является "предполной". Это значит, что между **V2** и $\mathbf{C}_2$ нет промежуточного исчисления. Дру-

[2]То есть дистрибутивная решетка $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ с 1 и 0 и операцией $\sim$, причем $\sim(\mathrm{x} \vee \mathrm{y}) = \sim x \wedge \sim y; \sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y; \sim\sim x = x; \sim 1 = 0; \sim 0 = 1; \sim a = a; \sim b = b; a \vee b = 1; a \wedge b = 0$. Операция $\sim$ называется отрицанием Де Моргана. Заметим, что решетка Де Моргана $\langle A, \vee, \wedge, \sim\rangle$ лежит в основании известной четырехзначной логики Белнапа (см. [9]).

[3]Обратим внимание на четырехзначную логику **DMB4** в [13]. Здесь вводится алгебраическая аксиоматизация **DMB4** в сигнатуре $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \neg, 1, 0\rangle$ под названием *деморгановская булева алгебра*: $\langle A, \vee, \wedge, \sim\rangle$-редукт есть решетка Де Моргана, а $\langle A, \vee, \wedge, \neg, 1, 0\rangle$-редукт есть булева алгебра. Здесь же представлено секвенциальное исчисление для **DMB4**.

гими словами, $\mathbf{C}_2$ является единственным собственным непротиворечивым расширением **V2**.

В [2] отмечается, что многие неклассические пропозициональные логики и соответствующие им алгебры могут быть единообразно введены и исследованы с помощью эндоморфизмов в дистрибутивных решетках. Здесь рассматривается расширение булевой алгебры $B = \langle A, \vee, \wedge, \neg \rangle$ одноместной операцией g, удовлетворяющей условиям дистрибутивности:

$$g(x \vee y) = g(x) \vee g(y), \qquad (1)$$
$$g(x \wedge y) = g(x) \wedge g(y), \qquad (2)$$

т. е. g является эндоморфизмом дистрибутивной решетки, причем

$$g(1) = 1, g(0) = 0. \qquad (3)$$

Также имеет место

$$g\neg(x) = \neg g(x). \qquad (4)$$

Полученная алгебра называется Bg-алгеброй, а тождества булевой алгебры вместе с (1)–(4) образуют аксиоматику для Bg-алгебр. Здесь же доказывается теорема стоуновского типа о представлении Bg-алгебр алгеброй множеств.

Если для всякого x $gg(x) = x$, то g есть инволюция. Заметим, что тождество (4) есть не что иное, как определение отрицания Де Моргана $\sim$.

Полагая в Bg-алгебре

$$\Box x = x \wedge g(x), \Diamond x = x \vee g(x),$$

получаем алгебру, соответствующую модальной логике **V2**.

В свою очередь, в этой алгебре операция g определяется следующим образом:

$$g(x) = \Box x \vee (\neg x \wedge \Diamond x), \text{где}\, \Diamond x = \neg\Box\neg x\, [2, \text{с.}\, 245],$$

т. е. $g(1) = 1, g(0) = 0, g(a) = b, g(b) = a$.

Таким образом, показано, что логики со связками $\{\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \Box\}$ ($=$ **V2**) и $\{\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, g\}$ функционально эквивалентны.

3. Логика Tr

Логику со связками $\{\to, \neg, T\}$, где T есть g, обозначим посредством **Tr**.[4] Связку T будем интерпретировать как оператор истинности. Заметим, что для него выполняется закон исключенного третьего:

$$T(\varphi) \vee T(\neg\varphi)$$

и он коммутирует с отрицанием $\neg$:

$$\neg T\varphi \leftrightarrow T\neg\varphi.$$

Обратим внимание на работу М. Фиттинга [8]. В то время как С. Крипке в своей известной работе о теории истины [11], альтернативной к теории истины Тарского, использует трехзначную логику Клини $\mathbf{K}_3$ [4, § 64], Фиттинг применяет четырехзначную логику, считая ее более естественной. Четырехзначная логика позволяет работать с полными решетками, а не с полу-решетками, что упрощает математический аппарат. Фиттинг подчеркивает, что четырехзначный подход имеет самое прямое отношение к семейству би-решеток (см. [10]), где наименьшей нетривиальной би-решеткой является как раз решетка Де Моргана. Развиваемая здесь четырехзначная теория истины включает в себя также подход Крипке. Интересно, что здесь Фиттинг расширяет язык новой теории истины операцией “конфляция” *(conflation)*, которая есть не что иное как эндоморфизм g.

4. Аксиоматизация Tr

1. Множество всех пропозициональных тавтологий (включая формулы с оператором T).
2. $T(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (T\varphi \to T\psi)$.
3. $\neg T\varphi \leftrightarrow T\neg\varphi$.
4. $TT\varphi \leftrightarrow \varphi$.

Правила вывода: *modus ponens* и правило Гёделя для T.

Заметим, что добавление аксиомы

5. $T\varphi \leftrightarrow \varphi$

---

[4]О функциональных свойствах логики **Tr** см. в [3]. По крайней мере, очевидно, что она не является функционально полной.

превращает логику **Tr** в консервативное расширение $\mathbf{C}_2$ посредством добавления к $\mathbf{C}_2$ оператора идентичности T.

Стоит отметить, что в силу функциональной эквивалентности логик **V2** и **Tr**, последняя также обладает интерполяционным свойством Крейга.

5. Модальная логика Tr

По техническим причинам нам будет удобно использовать следующий вариант аксиоматизации **Tr**, эквивалентный исходному. Определим логику **Tr** как множество формул (для удобства не различаем исчисления и множества выводимых в них формул), выводимых из следующих схем аксиом, где $\Box$ есть T:

1. Всевозможные подстановки модальных формул в классические тавтологии,
2. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$,
3. $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$,
4. $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$,
5. $\varphi \to \Box\Box\varphi$,
6. $\Box\Box\varphi \to \varphi$

по правилам вывода

- *modus ponens*: если есть формулы φ и $\varphi \to \psi$, то есть и формула ψ,
- правило Гёделя: если есть формула φ, то есть и формула $\Box\varphi$.

Здесь мы полагаем, что $\Diamond$ есть сокращение для $\neg\Box\neg$. Принципиально ничего не изменится, если считать связку $\Diamond$ исходной и ввести еще одну схему аксиом — $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$.

Замечание 1. Логика **Tr** является нормальной модальной логикой (это по определению означает, что в вышеприведенном определении обязательно наличие схем аксиом 1 и 2 и обоих правил вывода, если и не постулируемых, то допустимых). Для **Tr** (как для любой нормальной модальной логики!) справедливы следующие полезные в дальнейшем факты:

- логике **Tr** принадлежат все формулы вида ($n \geq 1$):
  - $\Box\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\varphi_n \leftrightarrow \Box(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$,
  - $\Diamond\varphi_1 \vee \cdots \vee \Diamond\varphi_n \leftrightarrow \Diamond(\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$;
- теорема о замене эквивалентных (в двух вариантах):
  - если $\mathbf{Tr} \vdash \psi \leftrightarrow \chi$, то $\mathbf{Tr} \vdash \varphi(\psi) \leftrightarrow \varphi(\chi)$, где $\varphi(\psi)$ — формула с некоторым отмеченным вхождением ψ, $\varphi(\chi)$ — результат замены ψ в φ на χ,
  - если $\mathbf{Tr} \vdash \psi \leftrightarrow \chi$, то если $\mathbf{Tr} \vdash \varphi(\psi)$, то $\mathbf{Tr} \vdash \varphi(\chi)$, где $\varphi(\psi)$ — формула с некоторым отмеченным вхождением ψ, $\varphi(\chi)$ — результат замены ψ в φ на χ.

Еще одно

Замечание 2. Легко показать, что из приведенной аксиоматики можно исключить одну из схем аксиом (любую) 5 или 6. Например, ввиду наличия аксиом 3 и 4 выводимости в **Tr** эквивалентности $\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$ (она разбита на конъюнктивные члены лишь для удобства дальнейших доказательств), легко видеть, что ввиду теоремы о замене эквивалентных, которая справедлива для всех нормальных модальных логик, мы в любой формуле можем заменять подформулу вида $\Box\varphi$ на $\Diamond\varphi$, и наоборот. Возьмем для примера схему аксиом 5, то есть $\varphi \to \Box\Box\varphi$. Поскольку здесь φ — произвольная формула, мы можем заменить ее на $\neg\varphi$, что дает нам $\neg\varphi \to \Box\Box\neg\varphi$, откуда по контрапозиции (аксиоме 1) получаем $\neg\Box\Box\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$, что применением классической тавтологии «снятия-навешивания двойного отрицания» и теоремы о замене эквивалентных позволяет получить $\neg\Box\neg\neg\Box\neg\varphi \to \varphi$, а значит, по определению $\Diamond$, формулу (точнее, схему аксиом) 6.

6. Логика $\mathbf{Tr}^-$

Определяем логику $\mathbf{Tr}^-$ как множество модальных формул, выводимых из следующих схем аксиом:

1. Всевозможные подстановки модальных формул в классические тавтологии,
2. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$,
3. $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$,

4. $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$,
5. $\varphi \to \Box\Box\varphi$,
6. $\Box\Box\varphi \to \varphi$,
7. Всевозможные формулы вида $\Box\varphi$, где φ — подстановка в классическую тавтологию,
8. $\Box(\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi))$,
9. $\Box(\Box\varphi \to \Diamond\varphi)$,
10. $\Box(\Diamond\varphi \to \Box\varphi)$,
11. $\Box(\varphi \to \Box\Box\varphi)$,
12. $\Box(\Box\Box\varphi \to \varphi)$

- *modus ponens*: если имеются φ и $\varphi \to \psi$, есть и формула ψ.

Коротко говоря, логика $\mathbf{Tr}^-$ по своей аксиоматике отличается от $\mathbf{Tr}$ тем, что удалено правило Гёделя, но добавлены схемы аксиом, а именно — каждая из схем аксиом χ логики $\mathbf{Tr}$ продублирована схемой $\Box\chi$.

7. Совпадение логик Tr и Tr$^-$

Теорема 1. *Логики* $\mathbf{Tr}$ *и* $\mathbf{Tr}^-$ *совпадают как множества выводимых формул.*

Доказательство. Включение $\mathbf{Tr}^- \subseteq \mathbf{Tr}$ совершенно очевидно, поскольку все аксиомы $\mathbf{Tr}^-$ тривиально выводимы в $\mathbf{Tr}$, а замкнутость относительно правила modus ponens уже постулирована, так что требуется доказать лишь включение $\mathbf{Tr} \subseteq \mathbf{Tr}^-$, то есть надо доказать, что если $\varphi \in \mathbf{Tr}$, то $\varphi \in \mathbf{Tr}^-$.

Также совершенно очевидно, что если замкнуть $\mathbf{Tr}^-$ по правилу Гёделя, то получится $\mathbf{Tr}$. Значит, надо доказать, что $\mathbf{Tr}^-$ уже и так замкнута относительно правила Гёделя, то есть если формула φ принадлежит логике $\mathbf{Tr}^-$, то и $\Box\varphi$ принадлежит логике $\mathbf{Tr}^-$.

Принадлежность φ логике $\mathbf{Tr}^-$ означает, что есть список (конечная последовательность) формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, каждая из которых есть либо аксиома $\mathbf{Tr}^-$, либо получается из предыдущих по правилу вывода modus ponens, причем $\varphi_n = \varphi$. Покажем, что в этом случае $\Box\varphi \in \mathbf{Tr}^-$, продемонстрировав как исходный вывод в $\mathbf{Tr}^-$ перестроить в вывод формулы $\Box\varphi$ в $\mathbf{Tr}^-$ возвратной индукцией по длине вывода n. По сути мы должны «промоделировать» правило Гёделя, то есть показать, что если φ выводима, то и $\Box\varphi$ выводима.

Итак (в соответствии с определением выводимости), пусть φ является аксиомой логики $\mathbf{Tr}^-$. Тогда она имеет вид аксиомы $\mathbf{Tr}$ или $\Box\chi$, где χ — аксиома $\mathbf{Tr}$. В первом случае автоматически получается, что формула $\Box\chi$ выводима в $\mathbf{Tr}^-$ по определению аксиоматики, а во втором — из того, что χ является аксиомой $\mathbf{Tr}$, и по аксиоме $\chi \to \Box\Box\chi$ и правилу modus ponens получаем, что выводима и $\Box\Box\chi$, то есть и в этом случае удалось «навесить» дополнительный $\Box$.

Теперь рассмотрим случай, когда φ_n получается из φ_k и φ_l при $k < n$ и $l < n$ по правилу modus ponens. Для определенности положим, что $\varphi_l = \varphi_k \to \varphi_n$. По индукционному предположению имеем, что формулы $\Box(\varphi_k \to \varphi_n)$ и $\Box\varphi_k$ выводимы в $\mathbf{Tr}^-$. Остается воспользоваться аксиомой $\Box(\varphi_k \to \varphi_n) \to (\Box\varphi_k \to \Box\varphi_n)$ и дважды применить правило modus ponens, чтобы получить, что $\Box\varphi_n$ выводима $\mathbf{Tr}^-$.

Доказательство закончено. □

8. Шкалы Крипке логики Tr

Здесь мы интересуемся устройством шкал логики $\mathbf{Tr}$, которое является довольно простым, как показывает

Теорема 2. *Шкала Крипке $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ является шкалой логики* $\mathbf{Tr}$ *в точности тогда, когда в $\mathcal{F}$ выполняются условия*

1. $\forall w \in W \ \exists v \in W \ wRv$

   «из каждой точки (мира) что-нибудь достижимо»,

2. $\forall w \in W \ \forall v_1 \in W \ \forall v_2 \in W \ (wRv_1 \ \& \ wRv_2 \Rightarrow v_1 = v_2)$

   «из каждой точки достижимо не более одной точки»,

3. $\forall w_1 \in W \ \forall w_2 \in W \ \forall w_3 \in W \ (w_1Rw_2 \ \& \ w_2Rw_3 \Rightarrow w_3 = w_1)$

   «из каждой точки за два шага мы вновь попадаем в ту же точку».

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{F} \models \mathbf{Tr}$ или, что по сути то же самое, в шкале $\mathcal{F}$ истинны все аксиомы $\mathbf{Tr}$. Покажем, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет всем условиям из формулировки теоремы.

Справедливость первого условия следует из истинности в $\mathcal{F}$ формулы $\Box p \to \Diamond p$ (она получена по схеме аксиом 3). В самом деле, $\Box p \to \Diamond p$

легко преобразуется в $\Diamond(\neg p \vee p)$, а любая формула вида $\Diamond\alpha$ может быть истинной в точке шкалы только в том случае, если из этой точки что-нибудь достижимо. Приведем соответствующие преобразования в виде последовательности эквивалентных формул:

$\Box p \to \Diamond p$,

$\neg\Box p \vee \Diamond p$,

$\neg\neg\neg\Box\neg\neg p \vee \Diamond p$,

$\neg\neg\Diamond\neg p \vee \Diamond p$,

$\Diamond\neg p \vee \Diamond p$,

$\Diamond(\neg p \vee p)$.

Отметим, что последний переход здесь осуществлен с помощью доказуемой во всех нормальных модальных логиках схемы $(\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \leftrightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi)$.

Покажем, что второе условие справедливо, рассуждением «от противного».

Итак, предположим, что для некоторых w, v_1, v_2 выполняется wRv_1, wRv_2, причем $v_1 \neq v_2$. Введем оценку V на шкале $\mathcal{F}$ так: $V(p) = \{v_1\}$, то есть v_1 — единственная точка, в которой истинна p, а в остальном оценка V произвольна. Полученную модель обозначим $\mathcal{M}$.

По выбору оценки имеем $\mathcal{M}, v_1 \models p$ и $\mathcal{M}, v_2 \not\models p$, откуда по условиям wRv_1, wRv_2 получаем $\mathcal{M}, w \models \Diamond p$ и $\mathcal{M}, w \not\models \Box p$, что дает $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond p \to \Box p$, а это противоречит истинности в $\mathcal{F}$ аксиом, получаемых по схеме 4.

Наконец, последнее — третье — условие. Опять рассуждаем «от противного».

Предположим, что для некоторых w_1, w_2, w_3 из $\mathcal{F}$ верно, что w_1Rw_2 и w_2Rw_3, но $w_1 \neq w_3$. Определим оценку V так: $V(p) = \{w_3\}$, то есть w_3 — единственная точка, в которой истинна переменная p, а в остальном V произвольна. Полученную модель обозначим $\mathcal{M}$.

По выбору оценки и ввиду того, что w_1Rw_2 и w_2Rw_3, имеем последовательно: $\mathcal{M}, w_3 \models p$, $\mathcal{M}, w_2 \models \Diamond p$, $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond\Diamond p$. Однако $\mathcal{M}, w_1 \not\models p$, что в итоге дает $\mathcal{M}, w_1 \not\models \Diamond\Diamond p \to p$, а это противоречит нашему предположению об истинности всех аксиом **Tr**, в частности — полученных по схеме 5, которая, как уже отмечалось, эквивалентна (в присутствии других схем, конечно) схеме 6.

Теперь покажем, что если для шкалы $\mathcal{F}$ выполнены все условия из формулировки теоремы, то в $\mathcal{F}$ истинны все формулы, принадлежащие **Tr**. Ясно, что для этого достаточно проверить истинность аксиом, поскольку правила вывода истинность формул сохраняют. Далее, нет нужды проверять истинность формул (аксиом), получаемых по схемам 1 и 2, поскольку они истинны во всех шкалах. То есть нам нужно проверить истинность аксиом, полученных по схемам 3, 4, 6 (схему 5, как замечено, рассматривать не обязательно, поскольку в контексте остальных схем она эквивалентна схеме 6). Вновь рассуждаем «от противного».

Предположим, что некоторая формула вида $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ (схема 3) опровергнута в шкале $\mathcal{F}$ при некоторой оценке V (то есть в модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$) в некоторой точке w, символически — $\mathcal{M}, w \not\models \Box\varphi \to \Diamond\varphi$. Последнее означает, что $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ и $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond\varphi$. Может ли какая-нибудь точка v шкалы $\mathcal{F}$ быть достижима из w? Нет, поскольку тогда из wRv следовало бы одновременно $\mathcal{M}, v \models \varphi$ и $\mathcal{M}, v \not\models \varphi$. Однако это противоречит условию «*из каждой точки что-нибудь достижимо*». Значит, наше предположение неверно, то есть все формулы вида $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ в шкале $\mathcal{F}$ истинны.

Перейдем к рассмотрению схемы 4 («по традиции» рассуждаем «от противного»).

Предположим, что некоторая формула вида $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$ опровергнута в шкале $\mathcal{F}$ при некоторой оценке V (то есть в модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$) в некоторой точке w, символически — $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond\varphi \to \Box\varphi$. Это означает, что $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$ и $\mathcal{M}, w \not\models \Box\varphi$. Таким образом, существуют точки v_1 и v_2, такие что wRv_1, wRv_2 и $v_1 \models \varphi$, $v_1 \not\models \varphi$, а потому $v_1 \neq v_2$. Тем самым получается, что условие «*из каждой точки достижимо не более одной точки*» нарушено, а это противоречие показывает, что на самом деле ни одна из формул вида $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$ опровергнута в шкале $\mathcal{F}$ быть не может.

Наконец, последняя схема — схема 6 (и вновь рассуждение «от противного»).

Предположим, что некоторая формула $\Box\Box\varphi \to \varphi$ опровергается в шкале $\mathcal{F}$ при некоторой оценке V (то есть модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$) в некоторой точке w_1, символически — $\mathcal{M}, w_1 \not\models \Box\Box\varphi \to \varphi$, в частности, $\mathcal{M}, w_1 \not\models \varphi$. Возьмем произвольные точки w_2 и w_3, такие что w_1Rw_2 и w_2Rw_3 (такие точки существуют ввиду условия «*из каждой точки что-нибудь достижимо*»). Поскольку $\mathcal{M}, w_1 \models \Box\Box\varphi$, мы имеем $\mathcal{M}, w_3 \models \varphi$. Значит, $w_1 \neq w_3$, что противоречит условию «*из каждой точки за два шага мы вновь попадаем в эту же точку*». Таким образом, мы вновь получили противоречие, откуда можно сделать вывод, что все формулы вида $\Box\Box\varphi \to \varphi$ в $\mathcal{F}$ истинны.

Доказательство теоремы закончено. $\Box$

Легко понять, что утверждение этой теоремы может быть упрощено. А именно, если интересоваться только шкалами с корнем, то есть шкалами, у которых есть точка r, обладающая тем свойством, что всякая точка достижима из r за какое-то число (конечное, разумеется, в частности, может быть за ноль) шагов по отношению достижимости.

Так вот, следствием из доказанной теоремы является

Теорема 3. *Шкалами с корнем логики* **Tr** *являются с точностью до изоморфизма две шкалы:* $\mathcal{F}_1 = \langle \{a\}, \{\langle a, a\rangle\}\rangle$ *(шкала из одной рефлексивной точки) и* $\mathcal{F}_2 = \langle \{b, c\}, \{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}\rangle$ *(шкала из двух взаимодостижимых иррефлексивных точек).*

Доказательство. Итак, r — корень шкалы $\mathcal{F}$ логики **Tr**. Возможны два случая: точка r рефлексивна; точка r иррефлексивна.

В первом случае из r не может быть достижима ни одна другая точка, поскольку в противном случае нарушилось бы свойство «*из каждой точки достижимо не более одной точки*». Эта шкала, очевидно, изоморфна шкале $\mathcal{F}_1$.

Во втором случае из точки r должна быть достижима (другая!) точка s (условие «*из каждой точки что-нибудь достижимо*»), причем ровно одна (условие «*из каждой точки достижимо не более одной точки*»). Из точки s тоже должна быть достижима и ровно одна точка, а она по условию «*из каждой точки за два шага мы вновь попадаем в ту же точку*» должна совпасть с r. Ясно, что мы получили шкалу, изоморфную $\mathcal{F}_2$: в качестве изоморфизма можно взять, например, функцию $f(r) = b$, $f(s) = c$.

Доказательство теоремы закончено. □

9. Полнота по Крипке логики Tr. Применение теоремы Салквиста

Известная теорема Салквиста [14, p. 110–143] дает достаточное условие полноты по Крипке нормальных модальных логик, более того, их каноничности и первопорядковости соответствующего класса шкал Крипке. Это условие состоит в том, что для аксиоматизации используется дополнительная к минимальной нормальной логике **K** аксиома, являющаяся конъюнкцией формул вида $\Box^k(\psi \to \chi)$, где $k \geq 0$, χ — позитивная формула, а ψ построена из пропозициональных переменных и отрицаний пропозициональных переменных, констант $\bot$ и $\top$ с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\Box$ и $\Diamond$ таким образом, что никакая из подформул формулы ψ вида $\psi_1 \vee \psi_2$ или $\Diamond\psi_1$, содержащих переменную без отрицания, не находится в области действия связки $\Box$. Некоторую несколько более сильную формулировку теоремы Салквиста с доказательством можно найти в [7, p. 347–354].

Ясно, что аксиомы 3–6 (точнее, их конъюнкция) удовлетворяют условию теоремы Салквиста, что сразу дает полноту по Крипке этой логики, то есть справедлива

Теорема 4. *Логика* **Tr** *полна по Крипке, то есть всякая формула* φ *выводима в* **Tr** *тогда и только тогда, когда* φ *истинна во всякой шкале логики* **Tr**.

Поскольку всякая полная по Крипке нормальная модальная логика полна относительно своих шкал с корнем, мы получаем, что утверждение этой теоремы можно усилить: *логика* **Tr** *полна относительно класса шкал* $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$*, где шкалы* $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{F}_2$ *определены в конце предыдущего раздела.* Иными словами, справедливо равенство $\mathbf{Tr} = \mathtt{Log}\mathcal{F}_1 \cap \mathtt{Log}\mathcal{F}_2$, где $\mathtt{Log}\mathcal{F}_1$ и $\mathtt{Log}\mathcal{F}_2$ — обозначения множеств формул, истинных в шкалах $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно. Однако и это утверждение имеет усиление. Перед его формулировкой докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Справедливо включение* $\mathtt{Log}\mathcal{F}_2 \subset \mathtt{Log}\mathcal{F}_1$*, причем включение является строгим.*

Доказательство. Покажем, что справедливо $\mathtt{Log}\mathcal{F}_2 \subseteq \mathtt{Log}\mathcal{F}_1$ (то есть нестрогое включение) рассуждением «от противного» (более точно, по контрапозиции). Другими словами, предположив, что $\varphi \notin \mathtt{Log}\mathcal{F}_1$, покажем, что $\varphi \notin \mathtt{Log}\mathcal{F}_2$.

Итак, пусть $\varphi \notin \mathtt{Log}\mathcal{F}_1$. Это означает, что при некоторой оценке V_1 на $\mathcal{F}_1$ для модели $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{F}_1, V_1 \rangle$ выполняется

$$\mathcal{M}_1, a \not\models \varphi.$$

Введем оценку V_2 на шкале $\mathcal{F}_2$ таким образом: полагаем для всякой переменной p, что

- если $V_1(p) = \emptyset$, то $V_2(p) = \emptyset$;
- если $V_1(p) = \{a\}$, то $V_2(p) = \{b, c\}$.

Индукцией по построению произвольной формулы ψ (в частности, это может быть и φ) рутинно доказывается, что

$$\mathcal{M}_1, a \models \psi \iff \mathcal{M}_2, b \models \psi \iff \mathcal{M}_2, c \models \psi.$$

Отсюда следует, что поскольку $\mathcal{M}_1, a \not\models \varphi$, то

$$\mathcal{M}_2, b \not\models \varphi, \text{ и } \mathcal{M}_2, c \not\models \varphi.$$

Теперь покажем, что включение строгое. Для этого достаточно заметить, что $\mathcal{F}_1 \models \Box p \to p$, но $\mathcal{F}_2 \not\models \Box p \to p$.

Лемма доказана. $\Box$

Теорема 5. *Логики* **Tr** *и* $\mathtt{Log}\mathcal{F}_2$ *совпадают, то есть логика* **Tr** *полна относительно одноэлементного класса шкал* $\{\mathcal{F}_2\}$.

Доказательство. Как замечено выше, $\mathbf{Tr} = \mathtt{Log}\mathcal{F}_1 \cap \mathtt{Log}\mathcal{F}_2$, а по лемме мы имеем $\mathtt{Log}\mathcal{F}_1 \cap \mathtt{Log}\mathcal{F}_2 = \mathtt{Log}\mathcal{F}_2$, что и дает требуемое.

Теорема доказана. $\Box$

10. Алгебраическая полнота логики Tr

Итак, выше установлено, что логика **Tr** совпадает со множеством формул, истинных в шкале $\mathcal{F}_2 \langle \{b, c\}, \{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}\rangle$. Стандартным способом преобразуем эту шкалу в алгебраическую модель (модальную алгебру) $\mathcal{A}_2$, которая семантически эквивалентна шкале $\mathcal{F}_2$.

В качестве носителя (то есть множества элементов) алгебры $\mathcal{A}_2$ множества возможных значений переменных, а значит и формул, в $\mathcal{F}_2$ (обозначения довольно произвольны): $\mathtt{1} = \{b, c\}$, $\mathtt{b} = \{b\}$, $\mathtt{c} = \{c\}$, $\mathtt{0} = \emptyset$. Обозначим алгебры посредством A_2, то есть $A_2 = \{\mathtt{1}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{0}\}$.

Булевы операции на A_2 вводим обычным теоретико-множественным образом, обозначая их как соответствующие классические связки.Так, отрицание есть теоретико-множественное дополнение:

$$\neg\mathtt{1} = \mathtt{0}, \quad \neg\mathtt{b} = \mathtt{c}, \quad \neg\mathtt{c} = \mathtt{b}, \quad \neg\mathtt{0} = \mathtt{1}.$$

Сходным образом «определяются» пересечение («конъюнкция») и объединение («дизъюнкция»):

$$\mathtt{1} \wedge x = x \wedge \mathtt{1} = x, \quad \mathtt{b} \wedge \mathtt{c} = \mathtt{c} \wedge \mathtt{b} = \mathtt{0}, \quad \mathtt{0} \wedge x = x \wedge \mathtt{0} = \mathtt{0},$$

и

$$\mathtt{1} \vee x = x \vee \mathtt{1} = \mathtt{1}, \quad \mathtt{b} \vee \mathtt{c} = \mathtt{c} \vee \mathtt{b} = \mathtt{1}, \quad \mathtt{0} \vee x = x \vee \mathtt{0} = x,$$

где x произвольно. Константам $\bot$ и $\top$ сопоставляем $\mathtt{0}$ и $\mathtt{1}$ соответственно. Остальным булевым связкам сопоставляем те операции, которые получаются по обычным определениям через суперпозию. Например, с учетом того, что импликация $\to$ определяется через дизъюнкцию и отрицание — $x \to y = \neg x \vee y$, получаем соответствующую операцию:

$$\mathtt{1} \to x = x, \quad \mathtt{b} \to \mathtt{c} = \mathtt{c}, \quad \mathtt{b} \to \mathtt{0} = \mathtt{c},$$

$$\to \mathtt{b} = \mathtt{b}, \qquad \to \mathtt{0} = \mathtt{b}, \qquad \mathtt{0} \to x = \mathtt{1}, \qquad x \to \mathtt{1} = \mathtt{1},$$

где x произвольно.

Осталось определить операцию, соответствующую связке $\Box$ (считаем связку $\Diamond$ производной). Воспользуемся тем же интуитивным соображением, которое мы использовали для булевых связок. Если x — некоторое множество истинности формул, то разумно полагать, что $\Box x$ — множество миров $\mathcal{F}_2$, из которых достижимы в точности миры из x. Так получаем:

$$\Box\mathtt{1} = \mathtt{1}, \qquad \Box\mathtt{0} = \mathtt{0}, \qquad \Box\mathtt{b} = \mathtt{c}, \qquad \Box\mathtt{c} = \mathtt{b}.$$

Алгебра $\mathcal{A}_2$ определена. Полагаем, что множество выделенных элементов в ней состоит только из $\mathtt{1}$ («формула истинна в шкале, если она истинна во всех мирах этой шкалы»). Так получается четырехэлементная логическая матрица, которую обозначим Ω_2.

Истинность формулы в матрице Ω_2 определяем, как обычно.

Оценкой в матрице Ω_2 считаем функцию v, которая каждой пропозициональной p сопоставляет некоторый элемент A_2. Оценка переменных распространяется на все формулы тривиальным индуктивным образом в соответствии с приведенными выше определениями операций. Например, $v(\alpha\wedge\beta) = v(\alpha)\wedge v(\beta)$ (должно быть ясно, что в последнем равенстве символ $\wedge$ имеет разный смысл — слева это пропозициональная связка конъюнкция, а справа — соответствующая операция в алгебре $\mathcal{A}_2$, то есть пересечение).

Тривиальной индукцией по построению формул доказываются следующие две леммы.

Лемма 2. *Пусть V — оценка пропозициональных переменных на шкале $\mathcal{F}_2$. Определим оценку v на матрице Ω_2 так:*

$$v(p) = \{x \in \{b, c\} \mid x \in V(p)\}.$$

Тогда для всякой формулы φ справедливо, что

$$v(\varphi) = \{x \in \{b, c\} \mid x \in V(\varphi)\}.$$

Лемма 3. *Пусть v — оценка пропозициональных переменных на матрице Ω_2. Определим оценку V на шкале $\mathcal{F}_2$ так:*

$$V(p) = v(p).$$

Тогда для всякой формулы φ справедливо, что

$$V(\varphi) = v(\varphi).$$

Из этих лемм следует, что шкала $\mathcal{F}_2$ и матрица Ω_2 семантически эквивалентны, то есть они опровергают, а тем самым и принимают, одни и те же формулы. Тем самым, поскольку **Tr** полна относительно шкалы $\mathcal{F}_2$, доказана

ТЕОРЕМА 6. *Логика* **Tr** *полна относительно матрицы Ω_2, то есть формула принадлежит логике* **Tr** *тогда и только тогда, когда она (формула) истинна в матрице Ω_2.*

11. Замечание о расширениях Tr

Итак, мы получили в свое распоряжение логику **Tr**, о которой может быть много вопросов, но мы коснемся только одного: какие расширения имеет **Tr**? Ввиду известного факта (всякая табличная логика имеет только табличные расширения) мы получаем, с учетом предыдущего, что всякое расширение **Tr** определяется либо шкалой $\mathcal{F}_2$, то есть является самой **Tr**, либо шкалой $\mathcal{F}_1$, либо пустым множеством шкал, то есть является противоречивой логикой. Других вариантов нет!

Литература

[1] *Ермолаева Н.М., Мучник А.А.* Модальные расширения логических исчислений типа Хао Вана // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 172–193.

[2] *Ермолаева Н.М., Мучник А.А.* Модальные логики, определяемые эндоморфизмами дистрибутивных решеток // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976. С. 229–246.

[3] *Карпенко А.С.* Решетки четырехзначных модальных логик // Логические исследования. 2015. № 21(1). С. 122–137.

[4] *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: Иностранная литература, 1957. 527 с.

[5] *Леммон Е.* Алгебраическая семантика для модальных логик I // Семантика модальных и интенсиональных логик / Ред. В.А. Смирнов. М.: Прогресс, 1981. С. 98–124.

[6] *Максимова Л. Л.* Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр // Алгебра и логика. 1979. Т. 18(5). С. 556–586.

[7] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford: Clarendon Press, 1997. 624 p.

[8] *Fitting M.* Bilattices and the theory of truth // Journal of Philosophical Logic. 1989. Vol. 18. P. 225–256.

[9] *Font J.M.* Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices // Logic Journal of the IGPL. 1997. Vol. 5(3). P. 413–440.

[10] *Ginsberg M.L.* Multivalued logics: A uniform approach to inference in artificial intelligence // Computational Intelligence. 1988. Vol. 4(3). P. 265–315.

[11] *Kripke S.* Outline of a theory of truth // Journal of Philosophy. 1975. Vol. 72. P. 690–716.

[12] *Lewis C.I., Langford C.H.* Symbolic Logic. N.Y.: Dover Publications, 1959 (2nd ed. with corrections). 506 p.

[13] *Pynko A.P.* Functional completeness and axiomatizability within Belnap's four-valued logic and its expansion // Journal of Applied Non-Classical Logics. 1999. Vol. 9(1). P. 61–105.

[14] *Sahlqvist H.* Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic / Ed. S. Kanger. Proceedings of the Third Scandinavian Logic symposium. Amsterdam: North-Holland, 1975. P. 110–143.

[15] *Scroggs S.J.* Extensions of the Lewis system S5 // The Journal of Symbolic Logic. 1951. Vol. 16. P. 112–120.

[16] *Sobochiński B.* Modal system S4.4 // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1964. Vol. 5(4). P. 305–312.

[17] *Sobochiński B.* Certain extensions of modal system S4 // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1970. Vol. 11(3). P. 347–367.

A.S. Karpenko, $\boxed{\text{A.V. Chagrov}}$

Modal Propositional Truth Logic Tr and its Completeness

Karpenko Alexander Stepanovich
Department of Logic, Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences.
12/1 Goncharnaya St., Moscow, 109240, Russian Federation.
E-mail: as.karpenko@gmail.com

Chagrov Alexander Vasilievich
Department of algebra and mathematical logic
Tver State University.
33 Zhelabova St., Tver, 170100, Russian Federation.
E-mail: chagrovy@mail.ru

In this paper Sobochiński's four-valued modal logic **V2** (extension of **S5**) is considered. The emergence of that logic, some its interesting properties and different equivalent formulations are presented. Its algebraic models are of particular interest: as the extension of De Morgan algebra by boolean negation $\neg$ and as the extension of Boolean algebra by the endomorphism g, which is interpreted then as the propositional truth operation T. The logic corresponding to the last case is denoted by **Tr**. The attention is paid to the application of **Tr** in Fitting's theory of truth. The axiomatization of **Tr** in language $(\rightarrow, \neg, T)$ is considered. The completeness of logic **Tr** is proved with use of Sahlqvist's powerful theorem, which gives the sufficient condition of Kripke completeness for normal modal logics. Algebraic completeness of logic **Tr** is also proved.

Keywords: modal logic **V2**, De Morgan algebra, boolean algebra, endomorphismus, logic **Tr**, Fitting's theory of truth, Kripke completeness, Sahlqvist's theorem, algebraic completeness

References

[1] Ermolaeva, N. M., Muchnik, A. A. "Modal'nye rasshireniya logicheskikh ischislenii tipa Khao Vana" [Modal expansion of logical calculi such as Wang Hao], *Issledovaniya po formalizovannym yazykam i neklassicheskim logikam* [Studies on the formal language and non-classical logics]. M.: Science, 1974, pp. 172–193. (In Russian)

[2] Ermolaeva, N. M., Muchnik, A. A. "Modal'nye logiki, opredelyaemye endomorfizmami distributivnykh reshetok" [Modal logic determined by the endomorphisms of distributive lattices], *Issledovaniya po teorii mnozhestv i neklassicheskim logikam* [Investigations on the theory of sets and non-classical logics]. M.: Science, 1976, pp. 229–246. (In Russian)

[3] Karpenko, A. S. "Reshetki chetyrekhznachnykh modal'nykh logik" [Lattices of Four-valued Modal Logics], *Logicheskie issledovaniya* [Logical investigations]. 2015, no 21(1), pp. 122–137. (In Russian)

[4] Klini, S. K. *Vvedenie v matematiku* [Introduction to mathematics]. M.: Foreign Literature, 1957. 527 pp. (In Russian)

[5] Lemmon, E. "Algebraicheskaya semantika dlya modal'nykh logik I" [Algebraic semantics for modal logics I], *Semantika modal'nykh i intensional'nykh logik* [The semantics of modal and intensional logic], ed. V. A. Smirnov. M.: Progress, 1981, pp. 98–124. (In Russian)

[6] Maksimova, L. L. "Interpolyatsionnye teoremy v modal'nykh logikakh i amal'gamiruemye mnogoobraziya topobulevykh algebr" [Interpolation theorems in modal logics and topo-Boolean algebra amalgamatable varieties], *Algebra i logika* [Algebra and logic]. 1979, vol. 18(5), pp. 556–586. (In Russian)

[7] Chagrov, A., Zakharyaschev, M. *Modal Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1997. 624 pp.

[8] Fitting, M. "Bilattices and the theory of truth", *Journal of Philosophical Logic*. 1989, vol. 18, pp. 225–256.

[9] Font, J.M. "Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices", *Logic Journal of the IGPL*. 1997, vol. 5(3), pp. 413–440.

[10] Ginsberg, M.L. "Multivalued logics: A uniform approach to inference in artificial intelligence", *Computational Intelligence*. 1988, vol. 4(3), pp. 265–315.

[11] Kripke, S. "Outline of a theory of truth", *Journal of Philosophy*. 1975, vol. 72, pp. 690–716.

[12] Lewis, C.I., Langford, C.H. *Symbolic Logic*. N.Y.: Dover Publications, 1959 (2nd ed. with corrections). 506 pp.

[13] Pynko, A.P. "Functional completeness and axiomatizability within Belnap's four-valued logic and its expansion", *Journal of Applied Non-Classical Logics*. 1999, Vol. 9(1), pp. 61–105.

[14] Sahlqvist, H. "Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic", Ed. S. Kanger. *Proceedings of the Third Scandinavian Logic symposium*. Amsterdam: North-Holland, 1975, pp. 110–143.

[15] Scroggs, S.J. "Extensions of the Lewis system S5", *The Journal of Symbolic Logic*. 1951, vol. 16, pp. 112–120.

[16] Sobochiński, B. "Modal system S4.4", *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 1964, vol. 5(4), pp. 305–312.

[17] Sobochiński, B. "Certain extensions of modal system S4", *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 1970, vol. 11(3), pp. 347–367.